А.С.Зеленский И.И.Панфилов

ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ
НАУЧНО ТЕХНИЧЕСКИЙ ЦЕНТР

А.С.Зеленский И.И.Панфилов

ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие
для учащихся старших классов
и поступающих в вузы

Москва
НТЦ "Университетский"
УНИВЕР-ПРЕСС
2008

УДК 373.167.1:514

Рецензент: доктор физико-математических наук,
профессор *А. Б. Киселёв*

Зеленский А. С., Панфилов И. И.

Геометрия в задачах. — М.: Научно-технический центр «Университетский»: УНИВЕР-ПРЕСС, 2008. — 272 с.: ил. (серия *«Математика: перезагрузка»*).

ISBN 978–5–7953–0160–0

Представленная книга – практическое пособие, цель которого – научить читателя решать планиметрические задачи. В процессе этого обучения заодно повторяется весь школьный курс планиметрии.

В первых трёх главах книги читатель вместе с авторами и самостоятельно рассматривает типичные модельные задачи, которые в дальнейшем станут элементами более сложных геометрических конструкций. Последующие две главы помогут читателю обобщить приобретённый опыт и развить навыки самостоятельного решения задач. Также приводится список рекомендованной литературы, в сжатом виде даются необходимые теоретические сведения по геометрии.

Предлагаемое пособие будет интересно всем желающим самостоятельно повторить планиметрию, поможет абитуриентам освоить доступный для себя уровень геометрической подготовки. Большой набор задач разного уровня сложности поможет при проведении учебных занятий учителям школ (как базовых, так и специализированных), а также преподавателям кружков и подготовительных курсов.

ISBN 978-5-7953-0160-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие посвящено планиметрии – предмету, традиционно «нелюбимому» многими школьниками и «страшному» для большого количества абитуриентов.

Эти «нелюбовь» и «страх» вполне объяснимы. Преподавание планиметрии в средней школе начинается в 7 классе. Этот предмет требует запоминания большого количества геометрических фактов и точных формулировок. Перенасыщенность курса теоретическим материалом усугубляется ограничениями по времени при его изложении на уроках. Учитель часто бывает вынужден «выдать» весь программный материал, не успев уделить достаточно времени решению задач.

К сожалению, преподавание планиметрии по-существу заканчивается в конце 9-го класса. В 10–11 классах школьникам предлагается изучение стереометрии – предмета, безусловно, интересного, но для абитуриентов ещё более «страшного» и почти не востребованного на вступительных экзаменах в вузы. В то же время планиметрические навыки решения задач, оставаясь неактивными, «благополучно» теряются. Результатом такой несогласованности программ является очень низкий процент решения планиметрических задач на вступительных экзаменах.

Вместе с тем общепризнано, что планиметрия является предметом, очень хорошо развивающим мышление учащегося. И, конечно, неспроста в вузах с повышенными требованиями по математике решение планиметрической задачи на вступительном экзамене является для экзаменаторов хорошим критерием при отборе абитуриентов для дальнейшего обучения.

Важным в процессе изучения любого предмета является интерес к нему, который возникает у учащегося только тогда, когда задачи «получаются». При этом в геометрии знание теоретического материала совсем не гарантирует успеха в решении задач. Для того, чтобы задачи начали получаться, их нужно перерешать достаточно много. Кроме того, большой объем разнообразной теоретической информации становится интересным только тем, кто уже почувствовал радость от решения геометрических головоломок.

Проблема при решении геометрической задачи часто заключается и в том, что, начиная решать, учащийся никак не обозначает ни цель своих действий, ни их последовательность и, использовав одну-две известные ему теоремы, буквально «вязнет» в собственных выкладках. Поэтому с самого начала надо учиться разбивать решение задачи на отдельные самостоятельные мини-блоки.

В первых трёх главах этой книги читатель на примере модельных задач познакомится с наиболее распространёнными из этих мини-блоков, попробует вместе с авторами и самостоятельно разрешить задачи, которые в дальнейшем станут элементами более сложных геометрических конструкций. Последующие две главы помогут читателю обобщить приобретённый опыт и развить навыки самостоятельного решения задач.

Представленная книга – практическое пособие, её цель – научить читателя решать планиметрические задачи, основываясь на базовых геометрических знаниях. При этом обоснование самих элементов теории, построение замкнутой согласованной теоретической модели в геометрии здесь не рассматривается. Во-первых, теоретический материал достаточно полно изложен в школьных учебниках и в различных учебных пособиях (их список приводится на стр. 230–235), а, во-вторых, хорошее знание теории абсолютно необходимо только сдающим устный экзамен.

Авторы настоящего пособия, являясь сотрудниками механико-математического факультета МГУ и кафедры высшей математики ГУ ВШЭ, в то же время более 20 лет ведут занятия по математике в специализированных классах математического и экономического профиля школы № 25 ЮЗАО г. Москвы, большая часть выпускников которых ежегодно становятся студентами МГУ и других ведущих вузов страны. В этой книге обобщён наш опыт преподавания геометрии школьникам.

Надеемся, что предлагаемое пособие будет интересно всем желающим самостоятельно повторить планиметрию, поможет абитуриентам освоить доступный для себя уровень геометрической подготовки. Большой набор задач разного уровня сложности поможет при проведении учебных занятий учителям школ (как базовых, так и специализированных), а также преподавателям кружков и подготовительных курсов.

ГЛАВА 1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 1.1. РАСЧЁТ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Треугольник — составная часть практически любой геометрической конфигурации, поэтому расчёт треугольников — одна из первых задач, с которой учащиеся знакомятся в средней школе. Суть этой задачи состоит в том, чтобы, зная определённые элементы в треугольнике, найти все остальные его элементы.

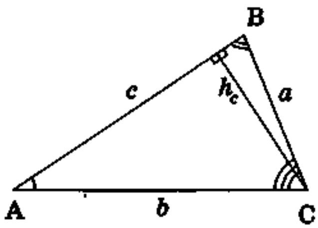
Формирование навыков в решении этой задачи — цель настоящего параграфа. Расчёт треугольника — это тот геометрический модуль, который должен быть хорошо отработан, ибо от его чёткой реализации зависит продвижение в решении множества геометрических задач.

Решение задач на расчёт треугольников чаще всего базируется на знании следующих фактов:

1. *Теорема синусов:* $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$ (1)

2. *Теорема косинусов:*
$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A.$ (2)

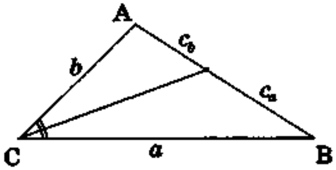
3. *S-формулы (формулы для площади):* $S=\dfrac{1}{2}ch_c=\dfrac{1}{2}ab\sin C=pr=$
$=\dfrac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$ (3)



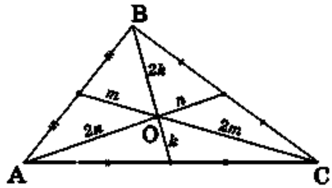
Здесь и далее (если не сказано другое): a, b, c — стороны треугольника; A, B, C — соответствующие противоположные им углы; h_c — высота, проведённая к стороне c; $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника; S — его площадь; r — радиус вписанной в треугольник окружности; R — радиус описанной около треугольника окружности.

4. *Биссектриса* любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника:

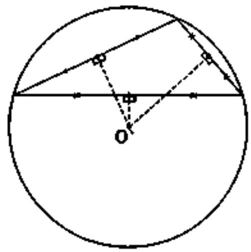
$$\frac{a}{b}=\frac{c_a}{c_b}. \qquad (4)$$



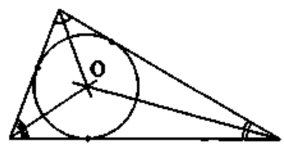
5. *Медианы* треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке на отрезки, длины которых относятся как 2:1, считая от вершины.



6. *Центр описанной* вокруг треугольника *окружности* (точка, равноудалённая от его вершин) является точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведённых к сторонам треугольника.



7. *Центр вписанной* в треугольник *окружности* является точкой пересечения биссектрис углов треугольника.



8. *Сумма внутренних углов треугольника* равна 180°.

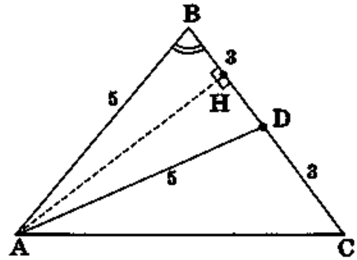
9. Против *большей стороны* в треугольнике лежит *больший угол*. И наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

10. Сумма *любых* двух сторон треугольника больше третьей стороны.

Мы не будем приводить здесь выводы хорошо известных геометрических утверждений и теорем. Для этого существует многочисленная литература (см., например, учебники [1–9] и учебные пособия, список которых приведён на стр. 230–235). Наша задача — научиться применять эти знания в решении практических задач.

Проиллюстрируем на различных примерах, как, используя перечисленные выше факты, добиться результатов в решении ключевой геометрической задачи на расчёт треугольников.

Задача 1. Найти сторону AC в ΔABC, если $BC = 6$, $AB = 5$, а медиана, проведённая к стороне BC, тоже равна 5.



Решение. Видим, что в треугольнике ABD заданы три элемента: $AB = 5$, $AD = 5$, $BD = 3$ (т. к. D — середина BC). Логично поэтому предположить, что мы можем найти все другие элементы этого треугольника. Замечаем, что если мы найдём $\cos B$, то задача решена, ведь тогда неизвестную сторону AC мы сможем найти по теореме косинусов для ΔABC.

Таким образом, план решения готов. Теперь — реализация.

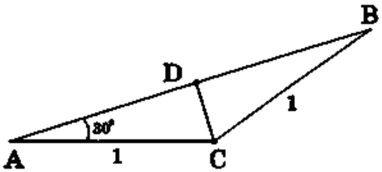
Почти не думая, мы находим $\cos B$ из теоремы косинусов для ΔABD: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2 \cdot AB \cdot BD} = \dfrac{5^2 + 3^2 - 5^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \dfrac{3}{10}$. Поэтому из теоремы косинусов для ΔABC получим: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dfrac{3}{10} = 43$, и $AC = \sqrt{43}$.

Ответ: $\sqrt{43}$.

Заметим, что если на первом шаге решения всё же немного подумать, то $\cos B$ находится гораздо проще: $\cos B = \dfrac{BD}{2 \cdot AB} = \dfrac{3}{10}$ (мы мысленно провели в равнобедренном ΔABD высоту и медиану AH и воспользовались тригонометрическими соотношениями в прямоугольном треугольнике ABH). Такие упрощающие ходы в планиметрии встречаются довольно часто.

Нет ничего страшного, если на первых порах где-то у вас будут более длинные решения — важно, чтобы они были правильными. По мере накопления опыта вы постепенно научитесь видеть эти более короткие ходы. И — мы уверены в этом — в процессе работы с книгой вы неоднократно будете находить более короткие решения, чем у авторов этой книги. Если они окажутся ещё и правильными, то наша цель будет достигнута!

Задача 2. Найти сторону AB в ΔABC, если $AC = BC = 1$, $\angle A = 30°$.



Решение. Если подойти к задаче формально (а в таком подходе иногда ничего плохого нет), то из теоремы косинусов $AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = BC^2$ получим $AB^2 + 1^2 - 2AB \cdot 1 \cdot \cos 30° = 1^2$. Отсюда $AB^2 - AB\sqrt{3} = 0$, и $AB = \sqrt{3}$ (второе решение $AB = 0$ явно не подходит). Ответ получен.

Всё в этом решении верно, но получилось, как и в предыдущей задаче, словно «из пушки по воробьям»... Гораздо лучше заметить, что, раз треугольник равнобедренный, то CD — его медиана, биссектриса и высота. Поэтому $AD = AC \cdot \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а $AB = 2AD = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 3. Найти площадь ΔABC, если $AC = 1$, $\angle A = 60°$, $\cos B = \sqrt{\dfrac{27}{28}}$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества получим $\sin^2 B = 1 - \dfrac{27}{28} = \dfrac{1}{28}$, поэтому $\sin B = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$. Обратим внимание, что у синуса выбран знак «+», так как в треугольнике все углы меньше 180°. Далее удобно воспользоваться теоремой синусов для вычисления стороны BC: $BC = AC \cdot \dfrac{\sin A}{\sin B} = 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{21}$. Для получения искомой площади можно предложить два пути.

Используя теорему косинусов $\left(\sqrt{21}\right)^2 = 1^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2}$, из квадратного уравнения находим AB (учитываем при этом, что $AB > 0$): $AB = 5$. И в результате $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

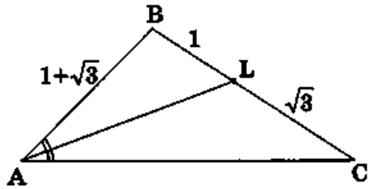
А можно вычислить синус угла между двумя известными сторонами: $\sin C = \sin\left(180° - (A+B)\right) = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}+\frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$. И теперь найдём площадь по той же формуле: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{21}\cdot\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Задача 4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектриса AL делит боковую сторону на отрезки $BL = 1$, $LC = \sqrt{3}$. Найти длину AL.

Решение. Так как треугольник равнобедренный, то $AB = BC = 1 + \sqrt{3}$. Таким образом, в треугольнике ABC заданы три элемента: AB, BL и LC. Попытаемся выразить через них другие элементы треугольника.



Из свойства биссектрисы AL имеем: $\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}$. Отсюда $AC = \sqrt{3}(1+\sqrt{3})$. Далее можно предложить два пути окончания решения.

По формуле для биссектрисы $AL^2 = AB\cdot AC - BL\cdot LC$ (о ней пойдёт речь в § 1.4) легко находится AL. Если вы знаете эту формулу (и знаете, как её доказать!), то именно так и нужно продолжать решение.

Если же нет, то, зная основание и боковые стороны равнобедренного треугольника, можно определить косинус угла при основании: $\cos C=\frac{b}{2a}$ (мы так уже делали в предыдущих задачах). В нашем случае $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Далее по теореме косинусов после простых, но громоздких выкладок получается $AL^2 = 6 + 3\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$.

Заметим, что от внешнего радикала при желании можно избавиться: $\sqrt{6+3\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12+6\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})^2}{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

Задача 5. В треугольнике ABC сторона $AC = 5$, высота $BH = 2$. Найти длину медианы AM к стороне $BC = 4$.

Решение. Найдя $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$, можно определить $\sin C = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot BC} = \frac{1}{2}$. Теперь из теоремы косинусов для ΔAMC несложно найти AM. Но прежде найдём $\cos C$. Важно не забыть, что из условия $\sin C = \frac{1}{2}$, следует не только то, что $\angle C = 30°$ (т.е. $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$), но и то, что $\angle C = 150°$ ($\cos C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$). Это означает наличие у этой задачи двух решений, соответствующих острому (рис. 1) и тупому (рис. 2) углам C. И поэтому возможных длин AM, найденных по теореме косинусов, тоже будет две. **Ответ:** $\sqrt{29 \pm 10\sqrt{3}}$.

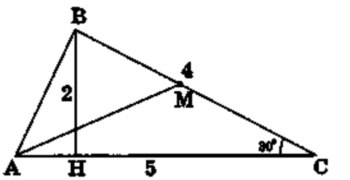


Рис. 1

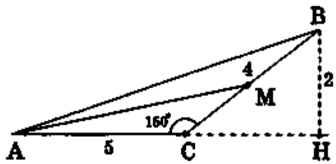


Рис. 2

В процессе решения, как это нередко бывает, алгебра помогла нам «увидеть» неединственность геометрического рисунка. Но если бы мы были невнимательны, то при переходе от $\cos^2 C$ к $\cos C$ вполне могли бы «потерять» знак и, как следствие, потерять второе решение.

Точно так же второго решения в этой задаче вполне можно было бы не заметить (и, в результате, привести неполное решение), если сразу искать угол C из прямоугольного треугольника BCH, выполнив только рис. 1 (ведь так даже, на первый взгляд, проще!). Причём значение 30° просто «бросается в глаза»: катет равен половине гипотенузы... В данном случае мы были бы «заложниками» собственного чертежа, и только хорошо развитая геометрическая интуиция, а также критическое отношение к собственным рисункам могли бы быть нашим спасением.

Задача 6. Найти сторону BC треугольника ABC, если $\angle A = 60°$, радиус вписанной окружности $r = 1$, а высота BH, опущенная из вершины B, равна 3.

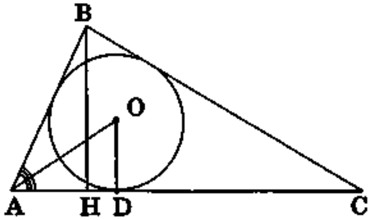


Рис. 1

Решение. В прямоугольном треугольнике ABH (см. рис. 1): $AH = BH \cdot \mathrm{ctg}60° = \sqrt{3}$. Учитывая, что OA — биссектриса угла A (т.к. центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис), из прямоугольного треугольника AOD находим $AD = r \cdot \mathrm{ctg}30° = \sqrt{3}$. Теперь трудно не заметить равенство $AH = AD$, что говорит о совпадении точек H и D. Это повод для того, чтобы нарисовать новый чертёж.

Сделаем небольшое отступление, отметив роль чертежа при решении геометрической задачи.

Запомните! Аккуратно выполненный чертёж очень помогает при решении задачи, может «подсказать» какие-либо соотношения между элементами геометрической фигуры, навести на мысль о каких-либо свойствах объекта, активизирует геометрическую интуицию. Сколько раз мы сначала замечали равенство отрезков или параллельность прямых из рисунка, а уж потом только получали эти факты из решения. Поэтому, если при решении задачи появляются какие-то условия, меняющие структуру чертежа, не поленитесь и потратьте лишние две минуты на создание нового, адекватного условиям рисунка.

Однако будьте осторожны! Иногда чертёж может быть причиной неполного решения (как в предыдущей задаче), а то и просто подсказать неверные факты. И помните: всё, что «привиделось» из чертежа, должно быть строго доказано без ссылок на этот чертёж.

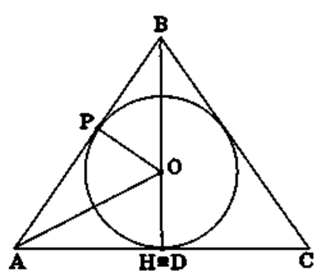


Рис. 2

Вернёмся к нашей задаче. Сделав новый рисунок (рис. 2), обратим внимание на то, что центр O вписанной окружности теперь уже лежит на высоте BH и поэтому $OB = 2$. Проведя радиус в точку P касания этой окружности со стороной AB, получим прямоугольный треугольник OPB, у которого катет OP равен половине гипотенузы OB. Следовательно $\angle PBO = 30°$, а учитывая, что BO — биссектриса, $\angle B = 60°$. Значит, треугольник ABC — равносторонний и $BC = AB = \dfrac{BH}{\sin 60°} = 2\sqrt{3}$. **Ответ:** $2\sqrt{3}$.

И снова, тот же результат можно было бы получить гораздо быстрее, зафиксировав сначала равнобедренность ΔABC из условия совпадения биссектрисы с высотой BH, а затем показав, что треугольник — равносторонний ($\angle A = \angle C = 60^0$).

При рассмотрении этих первых задач параграфа можно обнаружить некоторые закономерности:

1. Для определения любых элементов треугольника, или, как говорят, для полного разрешения треугольника, мы в условии задачи всегда изначально фиксировали наличие ровно трёх его элементов.

2. Эти три элемента не были связаны между собой никакими соотношениями — их нельзя встретить вместе ни в одной из геометрических формул. Такие элементы в математике называются *независимыми*.

3. Задав три независимых элемента в треугольнике, мы, тем не менее, не всегда получали однозначное решение задачи (к этому надо быть готовым).

Поэтому вывод, который мы можем уже сейчас сформулировать и который подтверждён решением множества задач на расчёт треугольников, звучит так:

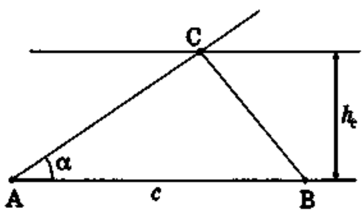
Зная любые три независимых элемента в треугольнике <u>обычно</u> можно найти все остальные его элементы.

Этот геометрический факт должен присутствовать в сознании решающего задачу. Конечно, при этом надо понимать, что такая задача не всегда имеет однозначное решение (например, две стороны и угол, прилежащий только к одной из них, определяют, как правило, два различных треугольника), что эта задача далеко не всегда бывает простой (иногда трудной, а иногда такой трудной, что легче попробовать поискать другие пути решения). Но, тем не менее, встретив при решении задачи треугольник с тремя независимыми элементами, вполне можно планировать дальнейшее продвижение в её решении, используя при необходимости любые другие элементы этого треугольника.

Неискушённому читателю, наверное, не до конца ясно, что такое три *независимых* элемента. Не будем вдаваться в «дебри теории», а скажем только, что если у вас есть три элемента, но при этом один из них выражается через два других, то это означает, что на самом деле вы знаете не три, а только два элемента! А *независимые* элементы друг через друга не выражаются.

Хорошей иллюстрацией сформулированному выводу является множество различных задач на построение циркулем и линейкой. Этот класс задач обладает своей спецификой и не является предметом обсуждения в данной книге. Однако для развития геометрической интуиции полезно проводить исследование на однозначность геометрической конструкции, исходя из возможности выполнить данное построение. Разберём несколько примеров, не требующих специальных геометрических знаний.

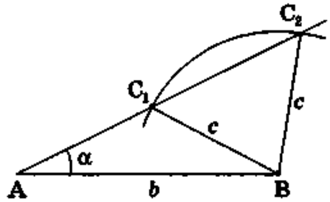
Пример 1. Построить треугольник ABC по стороне $AB = c$, прилежащему к ней углу α и высоте h_c, проведённой к этой стороне.



Решение. Строим угол α, на одной из его сторон откладываем отрезок AB длиной c. Далее, восстанавливаем из любой точки прямой AB перпендикуляр к этой прямой длиной h_c, а затем проводим через его вершину прямую, параллельную AB. В точке пересечения этой прямой со второй стороной угла α получим третью вершину C искомого треугольника. Такое пересечение единственно, поэтому алгебраическое решение такой задачи будет однозначным (т. е. заданные в условии три элемента независимы).

Пример 2. Построить треугольник ABC по двум сторонам $AB = b$, $BC = c$ и острому углу α с вершиной A.

Решение. Для построения треугольника сначала так же, как и в предыдущей задаче, строим угол α, отмечаем на одной из его сторон вершины треугольника A и B, а затем строим окружность с центром в B и радиусом c. Пересечение этой окружности со второй стороной угла α возможно только при определённых значениях величины c и в общем случае происходит в двух точках C_1 и C_2, что соответствует двум различным треугольникам ABC_1 и ABC_2, все параметры которых в каждом из случаев определяются однозначно. Таким образом, заданные три элемента — независимы. И это несмотря на то, что получается два решения.



Внимательный читатель заметит, что в этой задаче два решения будет не всегда. Действительно, если окружность с центром B касается прямой AC (это будет иметь место, если заданные в условии параметры связаны соотношением $c = b\sin\alpha$), то решение будет одно. Одно решение будет и в случае $c \geq b$ (подумайте почему). А если $c < b\sin\alpha$, то решений не будет вовсе.

Пример 3. Построить треугольник ABC по стороне $AC = b$, высоте $AH = h$ и медиане $AM = m$.

Решение. Из произвольной точки H на некоторой прямой восстанавливаем перпендикуляр, на котором откладываем отрезок AH длиной h. Затем, проведя окружность с центром в точке A радиусом b до пересечения в точке C с этой прямой (что возможно только при $b \geq h$) фиксируем прямоугольный ΔACH. Этот треугольник единственный, несмотря на то, что пересечений у окружности и прямой при $b > h$ будет два (просто второй случай полностью симметричен первому, поэтому получается равный треугольник). Далее (рис. 1) проводим окружность с центром в точке A и радиусом m ($m \geq h$) до пересечения с прямой CH в точках M_1 и M_2.

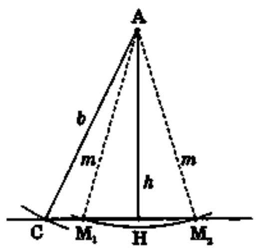


Рис. 1

Отложив на CH отрезки $M_1B_1 = CM_1$ (рис. 2) и $M_2B_2 = CM_2$ (рис. 3), в каждом из двух случае получим третью вершину треугольника. Мы опять получили, что трём заданным элементам b, m, h ($b \geq h$, $m \geq h$) соответствуют в общем случае два треугольника AB_1C и AB_2C, остальные параметры каждого из которых определя-

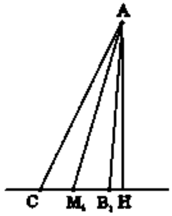


Рис. 2

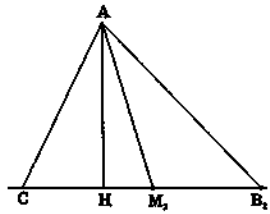
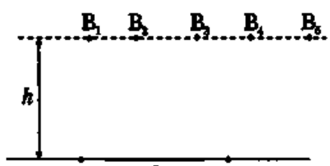


Рис. 3

ются (в том числе и алгебраически) однозначно. Решение этой задачи будет единственным в двух случаях: $b > m = h$ (ΔABC — равнобедренный), $m > b = h$ (ΔABC — прямоугольный).

И чтобы завершить тему независимых элементов, дадим ещё одну «задачу».

Пример 4. Построить треугольник ABC по стороне $AC = b$, высоте $BH = h$ и площади S.



Решение. На произвольной прямой отложим отрезок $AC = b$. Параллельно этой прямой на расстоянии h построим другую прямую (вообще говоря, её можно построить как «выше» AC, так и «ниже»: получаются симметричные рисунки). Где бы на этой прямой не располагалась точка B, высота BH равна h. При этом площадь треугольника ABC равна $\frac{bh}{2}$. Поэтому если заданное в условии S равно $\frac{bh}{2}$, то задача имеет бесконечно много решений, если же $S \neq \frac{bh}{2}$, то решений нет. Это как раз и означает, что тройка заданных в условии величин *не является независимой*: одна из величин выражается через две другие. И как бы мы ни старались, найти другие элементы треугольника, зная указанные три элемента, мы не сможем.

В следующем параграфе мы продолжим исследование задачи на расчёт треугольников, делая акцент на том, что часто для её разрешения приходится прибегать к использованию алгебраических приёмов.

Задачи для самостоятельного решения

1 *(МГУ, физич. ф-т, 1995)*. В треугольнике даны два угла α и β и радиус R описанной окружности. Найти высоту, опущенную из вершины третьего угла треугольника.

2. В треугольнике ABC площадью $\frac{12}{25}$ см^2 известны стороны $AC=\frac{6}{5}$ см, $BC = 1$ см. Найти длину стороны AB.

3. Найти площадь ΔABC, если $AC = 1$, $BC = 2$, $\angle BAC=60^0$.

4. В равнобедренном треугольнике основание равно 8, а высота, проведённая к основанию, равна 3. Найти высоту, опущенную на боковую сторону треугольника.

5 *(МГУ, геолог. ф-т, 1972)*. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30^0, $AB = 4$ см и $BC = 6$ см. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

6 *(МГУ, эконом. ф-т, 1995)*. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle BAC=30^0$, радиус описанной окружности равен 5. Найти сторону AC.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектриса CL пересекается с высотой BH в точке O так, что $HO : OB = 1{:}2$. Найти длину стороны AB, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 1.

8. В равнобедренном треугольнике ABC, стороны которого $AC = 4$ и $AB = BC = 6$, проведены биссектрисы AN и CM углов при основании. Определить длину MN.

9. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=AC$) угол при вершине A равен 2α. Прямая, проходящая через вершину B и центр O описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AC в точке D. Найти BD, если $AC = b$.

10. При повороте с центром в точке C на угол α ($\alpha < \pi/2$) треугольник ABC переходит в треугольник DEC. Точка E является образом точки B и лежит на стороне AB. Точка D – образ точки A. Найти углы треугольника ABC, если AC перпендикулярно ED.

Напоминаем, что в конце книги ко всем задачам даны ответы и указания.

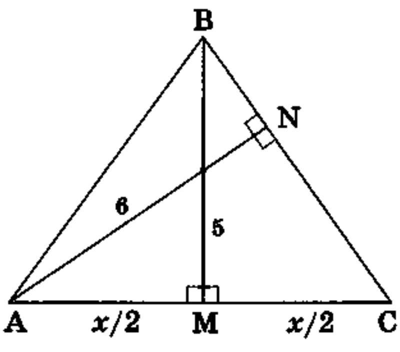
§ 1.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Продолжая обсуждение темы предыдущего параграфа, отметим, что далеко не всегда в геометрических задачах удаётся идти от заданных элементов и продвигаться в решении, используя упомянутые формулы (1) – (4), «рассчитывая» при этом треугольники один за другим. Чаще всего известных элементов в этих формулах не хватает или они «разбросаны» по разным треугольникам.

В этих случаях часто поступают как при решении текстовых задач в алгебре. Недостающий элемент называют неизвестной величиной x и выражают через неё другие элементы геометрической конфигурации. После чего для x ищется «замыкающее соотношение». Как правило, это происходит, когда удаётся один и тот же отрезок или угол выразить через x двумя различными способами или же «связать» различные элементы, выраженные через x, формулами (1) – (4) или какими-либо другими геометрическими зависимостями.

Разберём эту процедуру на примерах.

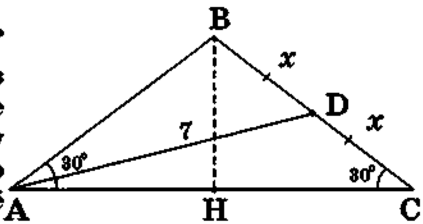
Задача 1. Найти основание равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на это основание, равна 5, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 6.



Решение. В треугольнике ABC заданы всего два элемента — этого явно мало, треугольник по двум элементам не определяется. Но есть ещё одно соотношение: равенство сторон AB и BC. Из этого равенства следует, что BM — высота, медиана и биссектриса. Поэтому, если обозначить $AC = x$, то $MC = \frac{x}{2}$, а поэтому по теореме Пифагора $BC^2 = BM^2 + MC^2 = 25 + \frac{x^2}{4}$. Замыкающее соотношение получится, если мы запишем площадь треугольника двумя способами. С одной стороны, $S = \dfrac{AC \cdot BM}{2} = \dfrac{x \cdot 5}{2}$, а с другой стороны, $S = \dfrac{BC \cdot AN}{2} = \dfrac{\sqrt{25+\dfrac{x^2}{4}} \cdot 6}{2}$. Поэтому $\sqrt{25+\dfrac{x^2}{4}} \cdot 6 = x \cdot 5$, или $36 \cdot \left(25+\dfrac{x^2}{4}\right) = 25x^2$. Отсюда $16x^2 = 36 \cdot 25$, $x^2 = \dfrac{36 \cdot 25}{16}$, $x = \dfrac{6 \cdot 5}{4} = \dfrac{15}{2}$.

Ответ: 7,5.

Задача 2. Найти площадь равнобедренного треугольника с углом при основании 30°, если медиана, проведённая к боковой стороне, равна 7.



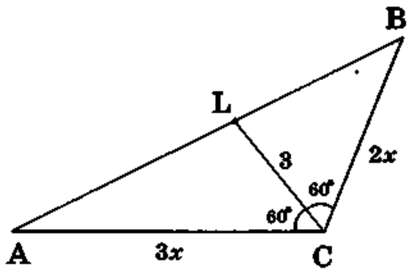
Решение. Попытки выразить какие-то элементы ΔABC через медиану и угол ни к чему не приводят. Естественно поэтому ввести какую-то неизвестную величину и затем искать для неё подходящее уравнение. Обозначим $BD = DC = x$, тогда $BC = AB = 2x$. Из прямоугольного треугольника BHC с острым углом 30° находим $BH = x$, $HC = x\sqrt{3}$. Далее по теореме косинусов для ΔADC ($AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos 30^\circ$) получим замыкающее соотношение $7^2 = (2x\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \cdot 2x\sqrt{3}x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \sqrt{7}$. Поэтому искомая площадь равна $\dfrac{AC \cdot BH}{2} = \dfrac{2x\sqrt{3} \cdot x}{2} = x^2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$.

Ответ: $7\sqrt{3}$.

Кстати, ещё проще было получить замыкающее соотношение из теоремы косинусов для ΔABD со сторонами x и $2x$ и углом 120°.

Задача 3 *(МГУ, ф-т почвовед., 1997)*. В треугольнике ABC угол C равен 120°, а биссектриса угла C равна 3. Длины сторон AC и CB относятся как 3:2 соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC.

Решение. Выбор неизвестной достаточно естественен и следует из условия: $AC = 3x$, $BC = 2x$. Тогда по теореме косинусов для ΔACL получим $AL^2 = (3x)^2 + 3^2 - 2\cdot 3x\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$, $AL = \sqrt{9x^2-9x+9}$, по теореме косинусов для ΔCLB аналогично получаем $LB = \sqrt{4x^2-6x+9}$.



Искомое замыкающее соотношение следует из теоремы о биссектрисе: $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$. Отсюда $\frac{\sqrt{9x^2-9x+9}}{\sqrt{4x^2-6x+9}} = \frac{3}{2}$, $\frac{x^2-x+1}{4x^2-6x+9} = \frac{1}{4}$, $x = \frac{5}{2}$. Поэтому $BC = 5$.

Ответ на второй вопрос задачи (точнее, на первый) можно искать по-разному. Можно, зная BC, найти все стороны треугольника ABC, а затем, используя теорему синусов, найти все углы.

А можно сразу (даже до вычисления BC) записать теорему синусов для ΔABC: $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$, $\frac{\sin A}{\sin(60°-A)} = \frac{2}{3}$ ($\angle B = 60° - \angle A$ — это следует из суммы углов треугольника), $3\sin A = 2(\sin 60°\cdot\cos A - \cos 60°\cdot \sin A)$, $4\sin A = \sqrt{3}\cos A$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **Ответ:** $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 5.

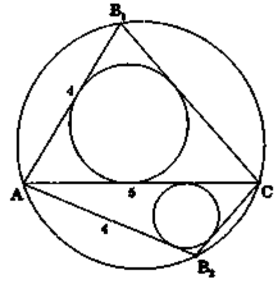
Заметим, что если сначала найти $\operatorname{tg} A$, то можно искать BC и по-другому: $\frac{BC}{\sin\angle BLC} = \frac{LC}{\sin B}$ (теорема синусов), $BC = LC\cdot\frac{\sin\angle BLC}{\sin B} =$

$$= \frac{3\sin(60°+A)}{\sin(60°-A)} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{1}{2}\sin A\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A} = \frac{3(\sqrt{3}+\operatorname{tg}A)}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}A} = \frac{3\cdot\frac{5}{4}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}\sqrt{3}} = 5.$$

А можно вообще всё сделать иначе! С предыдущими решениями совпадает только начало: $AC = 3x$, $BC = 2x$. После этого из теоремы косинусов для ΔABC находим $AB = x\sqrt{19}$. И теперь из следствия к той же теореме: $\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{4}{\sqrt{19}}$. И теперь легко находятся и $\operatorname{tg} A$, и x (из ΔACL).

Разные пути решения задач встречаются довольно часто. Конечно, всегда хочется найти самое красивое и изящное решение. Но в условиях экзамена особо злоупотреблять этим не стоит. Если вам удалось найти решение задачи, которое является правильным, но при этом не вполне удовлетворяет вашим эстетическим воззрениям, то можно, конечно, некоторое время поискать нечто более красивое, но только совсем недолго! Важно вовремя остановиться и изложить в чистовике это «некрасивое» решение. Если оно правильное, его вам обязаны зачесть. А за «красоту», кстати, никаких дополнительных баллов не дают. Да и не всегда оно существует, это «красивое» решение...

Задача 4. Найти радиус вписанной в треугольник ABC окружности, если $AB = 4$, $AC = 5$, а радиус описанной окружности $R = \sqrt{7}$.



Решение. Нет ни одной формулы, в которой заданные в условии три элемента ΔABC могли бы быть «связаны» без использования неизвестных величин. Поэтому надо определиться в выборе неизвестной.

Пусть, например, это будет величина угла A. Тогда из теоремы синусов следует $BC = 2\sqrt{7}\sin x$, а из теоремы косинусов — $BC^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos x$. Поэтому замыкающее соотношение для x: $\left(2\sqrt{7}\sin x\right)^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos x$.

Отсюда следует тригонометрическое уравнение $28\cos^2 x - 40\cos x + 13 = 0$, решая которое, получаем два возможных значения для $\cos x$: $\frac{1}{2}$ и $\frac{13}{14}$.

Найдём для каждого из них соответствующие значения $\sin x$ и длину стороны BC, после чего по формуле $r = \frac{S}{p}$ вычислим значение радиуса вписанной в ΔABC окружности:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BC = \sqrt{21}$, $S_{ABC} = 5\sqrt{3}$, $r = \frac{10\sqrt{3}}{9+\sqrt{21}}$;

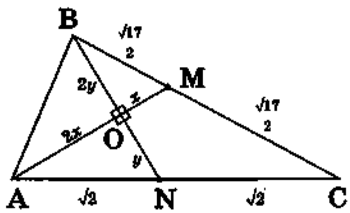
2) $\cos x = \frac{13}{14}$, $\sin x = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, $BC = \frac{3\sqrt{21}}{7}$, $S_{ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{7}$, $r = \frac{10\sqrt{3}}{21+\sqrt{21}}$.

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{9+\sqrt{21}}$; $\frac{10\sqrt{3}}{21+\sqrt{21}}$.

Видим, что неединственность геометрической конфигурации опять «подсказана» алгебраическими действиями. При этом предусмотреть заранее, что в такой задаче будет два различных решения, не всегда возможно. Однако, получив различные ответы, необходимо представить для себя геометрически оба случая (мы это сделали на рисунке), чтобы обосновать эту неединственность.

Нередко для удачного разрешения задачи одной неизвестной бывает недостаточно. Однако введение нескольких неизвестных никаких принципиальных отличий в решение не добавляет. Единственное, за чем необходимо следить, это за совпадением количества замыкающих соотношений с количеством выбранных неизвестных.

Задача 5. В треугольнике ABC медианы BN и AM перпендикулярны. Найти длину стороны AB, если $BC = \sqrt{17}$, $AC = 2\sqrt{2}$.



Решение. Обозначим через x треть длины медианы AM, через y — соответственно треть длины медианы BN, тогда по свойству медианы $AO = 2x$, $BO = 2y$ (здесь O — точка пересечения медиан треугольника ABC). Учитывая, что по условию $BM = MC = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $AN = NC = \sqrt{2}$, в качестве замыкающих соотношений можно выписать теорему Пифагора для прямоугольных треугольников AON и BOM: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 + 4y^2 = \frac{17}{4}. \end{cases}$ Отсюда $x^2 = \frac{1}{4}$, $y^2 = 1$, а искомая величина $AB^2 = 4x^2 + 4y^2 = 1 + 4$. **Ответ:** $AB = \sqrt{5}$.

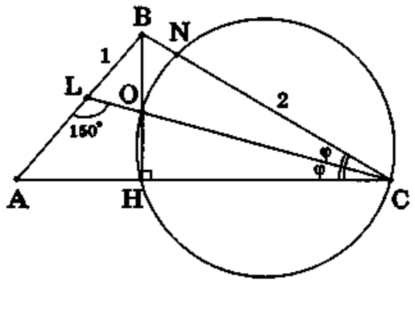
Сведение геометрической задачи к алгебраической системе уравнений — приём в геометрии очень распространённый. Любят использовать этот прием и абитуриенты, ибо он переводит задачу из «страшной» геометрии в «знакомую» алгебру.

Однако надо всегда иметь в виду, что, уходя от геометрических проблем, можно столкнуться с совершенно непреодолимыми трудностями в решении самой алгебраической системы. Нередко в экзаменационных работах можно наблюдать, как автор, видимо потеряв над собой контроль, вводит в решение задачи одну неизвестную за другой, а затем растерянно бросает получившуюся «неподъёмную» систему уравнений, втайне надеясь, что экзаменаторы хоть как-то зачтут такое решение.

Это самообман. Не доведённая до ответа задача решённой не считается. Поэтому делайте только тщательно взвешенные шаги. Ведь даже с введением только одной неизвестной решение подчас бывает весьма громоздким. А необоснованно большое количество неизвестных может полностью «блокировать» процесс решения.

Ещё пример.

Задача 6. В треугольнике ABC биссектриса CL пересекается с высотой BH в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника OHC, отсекает на стороне BC отрезок $CN = 2$. Определить длину отрезка BO, если $BL = 1$, а $\angle ALC = 150°$.



Решение. Обратим внимание на то, что заданные в условии элементы являются очень «разрозненными» и без введения неизвестных при решении задачи, пожалуй, не обойтись.

Заметим сразу же, т. к. $\angle OHC$ — прямой, то OC — диаметр заданной в условии окружности, а значит $\angle ONC$ — тоже прямой. Поэтому треугольники OHC и ONC равны и $HC = NC = 2$.

Обозначим через x искомую величину BO, $\angle ACL = \angle LCB = \varphi$. Тогда из ΔBHC: $BC = \dfrac{2}{\cos 2\varphi}$, из ΔOHC: $OH = 2\operatorname{tg}\varphi$. И первое замыкающее соотношение следует из свойства биссектрисы угла C в ΔBHC:

$$\frac{x}{OH} = \frac{BC}{2} \text{ или } x = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{\cos 2\varphi}. \qquad (1)$$

Другое замыкающее соотношение получаем из теоремы синусов в ΔBOL, в котором $\angle BLO = 30°$, а $\angle LOB = 90° - \varphi$ (как вертикальный к $\angle HOC$). Тогда $\dfrac{1}{\sin(90° - \varphi)} = \dfrac{x}{\sin 30°}$ или $x = \dfrac{1}{2\cos\varphi}$. $\qquad (2)$

Далее, приравняв x из (1) и (2), получим тригонометрическое уравнение $\cos 2\varphi = 4\sin\varphi$, решение которого $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$.

Из ΔALC следует, что $\varphi < 30°$, поэтому $\cos\varphi > 0$. Значит, $\cos\varphi = \sqrt{\sqrt{6} - \frac{3}{2}}$. Откуда уже из соотношения (2) легко найти x. Получаем: $x = \frac{1}{\sqrt{4\sqrt{6}-6}} = \frac{\sqrt{4\sqrt{6}+6}}{\sqrt{\left(\sqrt{4\sqrt{6}-6}\right)\left(\sqrt{4\sqrt{6}+6}\right)}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{6}+6}{60}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{6}+3}{30}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2\sqrt{6}+3}{30}}$.

Отметим в заключение, что выбор неизвестных не всегда удаётся сделать наиболее рациональным и решение от этого значительно усложняется. Попробуйте, например, в последней задаче в качестве второй неизвестной вместо угла φ взять $BC = y$. Решение сразу же станет гораздо более громоздким.

Замыкающие соотношения:

1) $(x+OH)^2 + 4 = y^2$ (теорема Пифагора);

2) $OH = \frac{2x}{y}$ (свойство биссектрисы угла C);

3) $\frac{x}{\sin 30°} = \frac{1}{2/OC}$, где $OC = \sqrt{OH^2 + 4}$ (теорема синусов в ΔBOL).

Решить такую систему, может быть, и возможно, но мы убедились, что использование тригонометрии значительно ускорило процесс решения.

Поэтому формулируем очередной совет: если в процессе решения получилась «нерешаемая» система, подумайте, нельзя ли ввести другие неизвестные для того, чтобы упростить процесс решения.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D, при этом $AD = 1$, $DC = 2$, $\angle ADB = 150^\circ$. Определить длину стороны AB, если $BD : BC = \sqrt{3}$.

2. Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найти отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABN и ABC, если $AN : AC = n$.

3. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния которой от сторон угла равны 4 и 8. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник с площадью 100. Найти катеты треугольника.

4. В треугольник ABC площади S вписана окружность радиуса r, которая касается сторон AC и BC соответственно в точках M и N. Найти AC, если $AM : MC = 2:3$, $BN : NC = 5:6$.

5. В треугольнике ABC угол при вершине B равен 70°, на стороне AB расположена точка E так, что $AE = 5$. Отрезок EC содержит точку D, при этом $AD = BC$, $\angle ADC = 110^\circ$. Найти EC.

6. Прямая, проходящая через середину стороны правильного треугольника и составляющая угол $\alpha\left(0^\circ < \alpha < 90^\circ\right)$ с этой стороной, отсекает треугольник от исходного треугольника. Найти отношение площадей исходного треугольника и отсечённого треугольника.

7 *(МГУ, химич. ф-т, 2001)*. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найти длину AD, если $CE = 2$.

8 *(МГУ, физич. ф-т, 1992)*. Площадь треугольника ABC равна S, угол BAC равен α и $AC = b$. Найти BC.

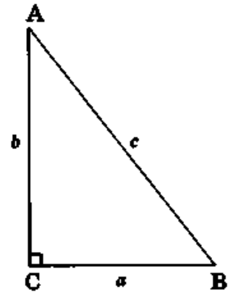
9 *(МГУ, геологич. ф-т, 1984)*. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, сумма длин двух других сторон равна 6. Найти площадь треугольника ABC, если косинус угла ACB равен $5/12$.

10. Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и DEF ($DE = EF$) равны. Вершины D, E, F расположены соответственно на продолжениях стороны BC за точку C, BA за точку A и AC за точку C, причём прямые BC и EF перпендикулярны. Найти углы треугольника ABC.

§ 1.3. ОСОБЕННОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

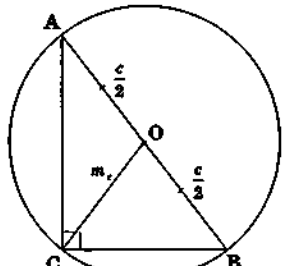
Наличие в треугольнике прямого угла приводит к значительным упрощениям в формулах (1) – (4) из §1.1.

Теорема косинусов преобразуется в теорему Пифагора ($c^2 = a^2 + b^2$), теорема синусов больше известна как тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике ($\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \sin B$, где $\angle C = 90°$), одна из важнейших S-формул: $S = \frac{ab}{2}$ (площадь равна половине произведения катетов).



Но при этом важно, что прямоугольный треугольник — геометрический объект, имеющий свои особенности, часто помогающие значительно упростить решение задач. Перечислим сначала те из них, которые можно использовать в решении без дополнительного обоснования:

1. Если описать вокруг прямоугольного треугольника окружность, то гипотенуза будет её диаметром, а середина гипотенузы центром этой окружности, при этом *медиана треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна радиусу описанной окружности или половине гипотенузы*. На языке формул: $m_c = \frac{c}{2} = R$.



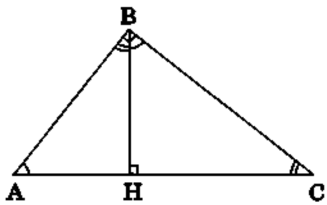
Верно и обратное утверждение — *треугольник, у которого центр описанной окружности лежит на середине одной из сторон, является прямоугольным.*

2. Если в прямоугольном треугольнике провести высоту из вершины прямого угла, то образуется три подобных прямоугольных треугольника ABC, AHB, BHC. Это легко доказыва-

ется из равенства соответствующих углов ABH и BCH, а уже из этого следуют две интересные зависимости:

а) *квадрат длины высоты треугольника, опущенной из вершины прямого угла, равен произведению длин проекций катетов на гипотенузу* (или высота — есть среднее геометрическое из длин этих проекций): $BH^2 = AH \cdot HC$;

б) *квадрат длины катета равен длине проекции этого катета на гипотенузу, умноженной на длину самой гипотенузы:* $AB^2 = AC \cdot AH$.



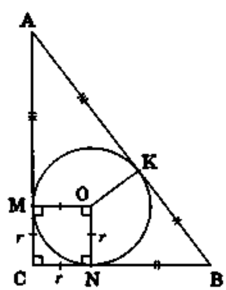
Есть ещё несколько интересных фактов, касающихся прямоугольных треугольников, которые полезно знать.

3. *Длина высоты, опущенной из вершины прямого угла, равна произведению катетов, делённому на гипотенузу:* $BH = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$.

Доказательство этого факта основывается на записи площади треугольника двумя способами: $S = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{AC \cdot BH}{2}$.

4. *В прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей:* $a + b = 2r + 2R$.

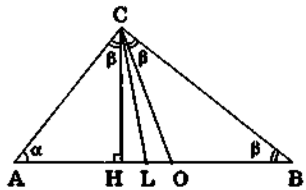
Доказательство. Опустив из центра O вписанной окружности на стороны треугольника перпендикуляры, получим точки касания M, N и K. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки, имеем $AM = AK$, $BN = BK$, $CM = CN = r$. Тогда $a + b = AM + MC + CN + NB = AK + r + KB + r = (AK + KB) + 2r = AB + 2r$. Поэтому $a + b = c + 2r = 2R + 2r$.



Это свойство прямоугольных треугольников часто используют в виде $a + b = c + 2r$ или в виде формулы, выражающей *радиус вписанной в треугольник окружности через его стороны*: $r = \frac{a+b-c}{2}$.

5. *Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника является также биссектрисой угла между высотой и медианой, исходящих из той же вершины.*

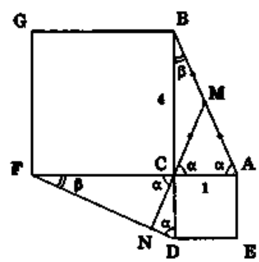
Доказательство этого факта совершенно очевидно из чертежа. Из прямоугольного ΔACH: $\angle ACH = 90° - \angle CAH = 90° - \alpha = \beta$, из равнобедренного ΔCOB: $\angle OCB = \angle OBC = \beta$. Из того, что $\angle ACL = \angle LCB$, $\angle ACH = \angle OCB$, следует $\angle HCL = \angle LCO$, что и требовалось доказать.



Обратное утверждение также верно — *треугольник, у которого биссектриса угла между высотой и медианой, исходящими из одной вершины, является также биссектрисой угла между двумя сторонами, исходящими из той же вершины, является прямоугольным.* Полезно попробовать доказать это утверждение самостоятельно.

А сейчас разберём несколько задач.

Задача 1 (*МГУ, географ. ф-т, 1994*). Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если длины катетов равны 1 и 4.



Решение: 1) $\Delta FCD = \Delta ABC$ (по двум сторонам и углу между ними);

2) $CM = MA$ (как медиана прямоугольного треугольника) $\Rightarrow \angle MCA = \angle MAC = \alpha$ (обозначим);

3) $\angle MCA = \angle FCN = \alpha$ (как вертикальные);

4) $\angle CFD = \angle ABC = 90^0 - \alpha$ (из равенства соответствующих треугольников);

5) из 3) и 4) $\Rightarrow CN$ — высота в ΔFCD;

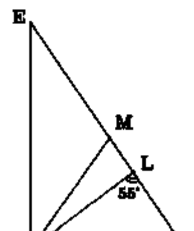
6) $CN = \dfrac{2 \cdot S_{FCD}}{FD} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$. **Ответ:** $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

В предложенном решении в каком-то смысле даётся ответ на очень распространенный вопрос абитуриентов: «Как оформлять решение геометрической задачи?». Обратите внимание, в решении перечислены факты, приводящие к определенному логическому выводу. Каждый из них представляет из себя законченный геометрический тезис, снабжённый комментарием-ссылкой на используемую теорему. Если этот тезис нуждается в специальном обосновании, лучше, чтобы не перегружать решение, провести его доказательство в скобках. В этом случае решение имеет хорошо «читаемый» вид, что удобно как для самого решающего, так и для проверяющего. «Кто ясно мыслит, ясно излагает» — в этом основной ориентир при оформлении решения задачи. Однако всё же это больше совет, чем требование. Важно, решив задачу, коротко и обоснованно изложить это решение. Форма изложения на вступительных экзаменах обычно не так важна.

К сожалению, форма играет роль (порой — увы — даже более важную, чем содержание...) на выпускных школьных экзаменах. Авторы этой книги, как могут, борются с этой печальной особенностью школьных экзаменов, но побеждать удаётся не всегда...

Задача 2 *(МГУ, геолог. ф-т, 1999)*. Медиана DM треугольника DEF равна половине стороны EF. Один из углов, образованных при пересечении стороны EF с биссектрисой DL, равен 55°. Найти углы треугольника DEF.

Решение: 1) точка M равноудалена от вершин $DEF \Rightarrow M$ — центр описанной окружности $\Rightarrow \Delta DEF$ — прямоугольный;

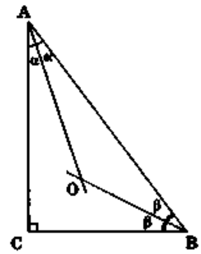


2) DL — биссектриса $\Rightarrow \angle LDF = 45^0$; $\angle DLF = 55^0$ (по условию) $\Rightarrow \angle F = 80^0$ (т.к. сумма углов треугольника равна 180^0) $\Rightarrow \angle E = 10^0$.

Ответ : $10^0; 80^0; 90^0$.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике биссектрисы острых углов A и B пересекаются в точке O. Найти угол AOB.

Решение. Обозначим острые углы треугольника через 2α и 2β. Тогда $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$. И из ΔBOA получим: $\angle AOB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = = 135^\circ$.



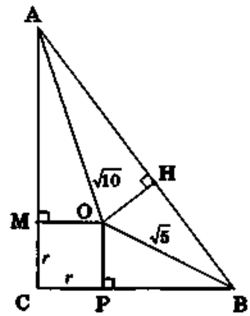
Ответ: 135°.

Заметим, что если бы в условии нужно было найти не угол AOB, а угол между прямыми AO и BO, то ответ был бы другой! Если вы ещё не отгадали какой, мы вам подскажем: 45^0 (вспомните определение угла между двумя прямыми).

И ещё заметим, что в условии этой задачи не задано ни одного элемента треугольника. Поэтому результат справедлив абсолютно для любого прямоугольного треугольника!

Задача 4. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, находится на расстоянии $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$ от вершин острых углов A и B. Найти катеты.

Решение: 1) $\angle AOB = 135^0$ (см. предыдущую задачу) $\Rightarrow$ $AB^2 = 10+5-$ $-2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos 135^0 = 15+2\cdot\sqrt{50}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 25$ (теорема косинусов в AOB), $AB = 5$.



2) Соединим центр O окружности с точками касания M, H, P. Тогда $MCPO$ — квадрат со стороной, равной радиусу вписанной окружности r. Кроме того, r является высотой в AOB. Для определения r необходимо двумя способами выразить площадь этого треугольника: $S_{AOB} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot r \Rightarrow r = OH = 1$.

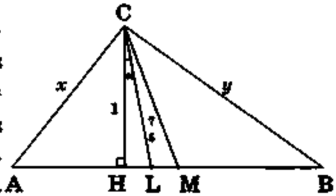
3) $HB^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2$ (теорема Пифагора в ΔOHB) $\Rightarrow HB = 2, AH = 3$.

4) $AM = AH = 3$, $BP = BH = 2$, $CM = CP = r = 1$ (как отрезки касательных, проведенные из одной точки) $\Rightarrow AC = 4, BC = 3$. **Ответ:** 3; 4.

Можете, в качестве упражнения, попробовать решить эту задачу алгебраическим путем, приняв катеты треугольника за x и y.

Задача 5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведены медиана CM, биссектриса CL, и высота CH. Найти длину CM, если $CH = 1$, $CL = 7/5$.

Решим эту задачу двумя способами.



Решение 1. В качестве первого выберем алгебраический подход, определив неизвестными катеты треугольника $AC = x$, $BC = y$. Затем, используя заданные в условии высоту CH и биссектрису CL, запишем площадь треугольника ABC тремя различными способами: $S_{ABC} = \frac{1}{2}xy$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ и $S_{ABC} = S_{ACL} + S_{LCB} = \frac{1}{2}x \cdot CL \cdot \sin 45° + \frac{1}{2}y \cdot CL \cdot \sin 45° = \frac{1}{2}CL \cdot (x+y) \cdot \sin 45° = \frac{7\sqrt{2}}{20}(x+y)$.

В итоге получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = xy, \\ 10xy = 7\sqrt{2}(x+y). \end{cases}$ Эта система относится к классу так называемых симметрических систем, в которых часто применяется замена $u = x + y$, $v = xy$. В переменных $(u; v)$ система имеет более простой вид: $\begin{cases} u^2 - 2v = v^2, \\ 10v = 7\sqrt{2} \cdot u. \end{cases}$ Учитывая, что $v > 0$, получаем $v = 98$. После этого находим $CM = \frac{AB}{2} = \frac{AC \cdot CB}{2 \cdot CH} = \frac{xy}{2} = \frac{v}{2} = 49$.

Решение 2. 1) В прямоугольном ΔHCL находим $\cos\alpha = 5/7$ (здесь введено обозначение $\angle HCL = \alpha$).

2) CL — биссектриса в ΔHCM (т.к. ΔABC — прямоугольный и CL — биссектриса в нём по условию).

3) Тогда $\cos\angle HCM = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{49}$.

4) В прямоугольном ΔHCM: $CM = \frac{1}{\cos 2\alpha} = 49$. **Ответ:** 49.

Видим, что знание специфики прямоугольного треугольника делает решение задачи намного более привлекательным.

Задачи для самостоятельного решения

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD. Точка D находится на расстоянии m и n от катетов AC и BC соответственно. Найти длины катетов.

2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD. При этом $CD : BD = 1 : 4$, $AD = 2$. Найти длины сторон треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике ABC величина меньшего угла A равна α, точка D – середина гипотенузы AB. Точка F симметрична точке B относительно прямой CD. Найти величину угла AFC.

4. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины одного из острых углов на медиану, проведенную к гипотенузе.

5. Найти расстояние от центра вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 окружности до высоты, опущенной на гипотенузу.

6 *(МГУ, эконом. ф-т, 1976)*. В треугольнике ABC задана точка M на стороне AC, соединённая с вершиной B прямолинейным отрезком MB. Известно, что $AM = 6$, $MC = 2$, $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MBC = 30^\circ$. Найти площадь треугольника ABC.

7 *(МГУ, геолог. ф-т, 2002)*. В треугольнике ABC угол C – прямой, отношение медианы CM к биссектрисе CN равно $\sqrt{6}:1$, высота $CK = 2$. Найдите площади треугольников CNK и ABC.

8 *(МГУ, социолог. ф-т, 2004)*. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок BH является высотой, опущенной на гипотенузу, а BL – медианой в треугольнике BHC. Найти угол LBC, если известно, что $BL = 4$ и $AH = \dfrac{9}{2\sqrt{7}}$.

9 *(МГУ, геологич. ф-т, 2004)*. В треугольнике ABC угол B прямой, точка M лежит на стороне AC, причём $AM : MC = 1 : 3\sqrt{3}$. Величина угла ABM равна $\pi/6$, $BM = 6$. Найдите величину угла BAC и расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников BCM и BAM.

10 *(МГУ, географ. ф-т, 1994)*. В треугольнике KMN проведены высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найти высоту NA, биссектрису NB и медиану NC, если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R.

§ 1.4. МЕДИАНЫ, БИССЕКТРИСЫ, ВЫСОТЫ

В этом параграфе мы рассмотрим различные специфические свойства медиан, биссектрис и высот треугольника, знание и умелое использование которых зачастую сокращает решение, делая его более простым и понятным.

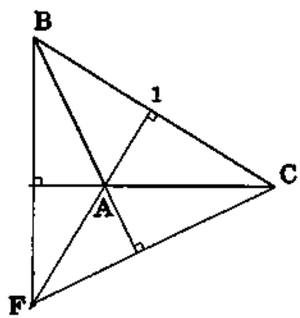
Этот материал имеет большой познавательный аспект и будет интересен в первую очередь тем, кто в планиметрии уже уверенно «стоит на ногах». Поэтому, если он вам покажется пока сложным для восприятия, непонятные места опускайте и двигайтесь дальше.

Начнём с хорошо известного геометрического факта о *единственности точек пересечения:*

а) *медиан треугольника*; б) *его биссектрис* (центр вписанной окружности); в) *высот треугольника* (ортоцентр треугольника).

Задавая в треугольнике два элемента (две медианы, две биссектрисы или две высоты), авторы задачи нередко проверяют, способен ли учащийся сделать дополнительное построение, соединив вершину с заданной точкой пересечения, и догадаться, что полученный отрезок является частью третьего элемента (соответственно третьей медианы, третьей биссектрисы или третьей высоты). Именно этот приём используется в следующей задаче.

Задача 1. В треугольнике ABC угол A — тупой. Высоты или их продолжения, проведённые к сторонам AC и BC, пересекаются в точке F, при этом $\angle FBA = \angle ABC$, $BC = 1$. Найти FB.

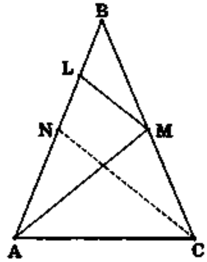


Решение. 1) Из единственности точки пересечения высот ΔABC следует, что высота, проведённая из точки C к стороне AB, будет проходить через точку F, пересекая прямую BA под углом $90°$.

2) В ΔFBC: BA — биссектриса $\angle B$ (по условию) и высота $\Rightarrow \Delta FBC$ — равнобедренный, а значит $FB = BC = 1$.

Ответ: 1.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AM равна 3. На стороне AB взята точка L, делящая ее в соотношении $AL : LB = 3 : 1$. Найти LM.



Решение. Если обозначить $LB = x$, то $AL = 3x$, $BC = 4x$, $BM = 2x$, $MC = 2x$. Проведём ещё одну медиану — CN, которая тоже равна 3. Тогда $AN = 2x$, $NL = x$. Т. к. $NL = LB$, $MC = MB$, то LM — средняя линия треугольника BNC, она равна половине NC, т.е. $\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Перейдём теперь к рассмотрению свойств медиан, биссектрис и высот треугольника по отдельности.

Медиана

Основное свойство: *медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой на отрезки, длины которых относятся как 2 : 1, считая от вершины.*

Медиана выражается через стороны *треугольника:*

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}. \quad (1)$$

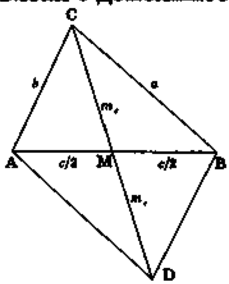
Полезно уметь выводить эту формулу. Приведём два различных вывода, тем более что в каждом из них содержатся определённые поучительные моменты.

1. Если соединить точку M, взятую на стороне AB треугольника ABC, с противоположной вершиной C, то углы, образованные отрезком CM и стороной AB треугольника будут смежными, а значит, они имеют равные синусы и противоположные по знаку косинусы. Это обстоятельство удобно использовать в задачах для связи элементов треугольников, лежащих по разные стороны от CM, используя теоремы синусов и косинусов. И, кстати, совершенно не обязательно, чтобы точка M была равноудалена от вер-

шин A и B (поэтому этот приём можно использовать не только тогда, когда CM — медиана).

В нашем же случае, выписав теорему косинусов в треугольниках ACM и CMB: $b^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} - 2m_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\angle CMA$, $a^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} + {}$ $+2m_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\angle CMA$ и сложив полученные равенства, получим искомую формулу: $2m_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$.

2. Другой способ получения этой формулы связан с дополнительным построением, характерным для задач на медианы. Если медиану CM продолжить за точку M и отложить на этой прямой отрезок MD, равный по длине отрезку CM, получим четырехугольник $ACBD$, диагонали которого точкой пересечения делятся пополам, то есть параллелограмм (по признаку параллелограмма). А в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон (факт, который необходимо знать). То есть

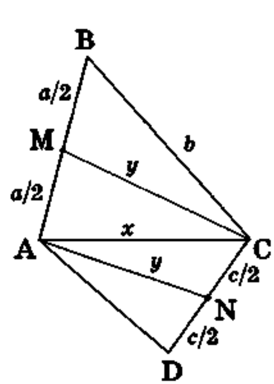


$$\left(2m_c\right)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2. \qquad (2)$$

Рассмотрим пример.

Задача 3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно, причем $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AN = CM$. Найти AD.

Решение. Легко понять, что CM, AN — медианы двух разных треугольников. Обозначим $AC = x$, $AN = CM = y$, затем дважды воспользуемся формулой для медианы (2) в треугольниках ABC и ACD: $a^2 + \left(2y\right)^2 = 2b^2$ $+ + 2x^2$, $c^2 + \left(2y\right)^2 = 2AD^2 + 2x^2$.



Вычитая одно уравнение из другого, получим искомый результат.

Ответ: $\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{2}}$.

Биссектриса

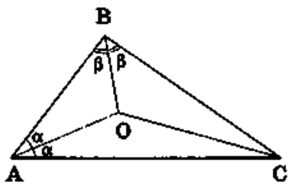
Биссектриса — геометрический объект, обладающий множеством полезных свойств, помогающих решать задачи. Часть из них уже была затронута нами ранее.

Во-первых, *биссектриса — геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла.*

Во-вторых, *в точке пересечения биссектрис углов треугольника лежит центр вписанной в треугольник окружности.*

В-третьих, очень важное свойство (4) из §1.1: *биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*

Перечислим другие важные свойства.



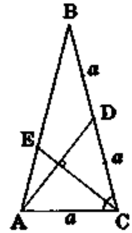
1. Мы уже видели в предыдущем параграфе, чему равен угол между биссектрисами в прямоугольном треугольнике. В произвольном треугольнике также существует *зависимость между одним из его углов и соответствующим ему углом между биссектрисами:* $\angle AOB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$. (3)

Попробуйте доказать эту формулу самостоятельно, введя, как и ранее, углы 2α и 2β при соответствующих вершинах A и B треугольника.

2. В задаче 1 этого параграфа мы уже встречались с ситуацией, когда *биссектриса пересекает некоторую прямую под углом 90°*, и видели, что в момент этого пересечения происходит «рождение» *равнобедренного треугольника.*

В силу распространённости этой геометрической конфигурации приведём ещё один похожий пример.

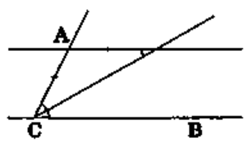
Задача 4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AD перпендикулярна биссектрисе CE. Найти косинус угла ACB



Решение: Понятно, что ACD — равнобедренный (биссектриса, проведённая из C, совпадает с высотой). Поэтому $AC = CD = a$. Тогда $BC = 2a$ и $\cos C = \dfrac{a/2}{2a} = \dfrac{1}{4}$.

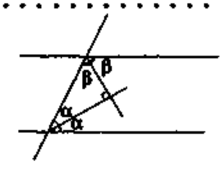
Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

3. При пересечении биссектрисы угла и прямой, параллельной одной из его сторон, образуется равнобедренный треугольник, что является следствием равенства накрест лежащих углов.



Этот геометрический факт, как, впрочем, и следующий, не раз будут использованы нами в задачах на трапеции, параллелограммы и ромбы.

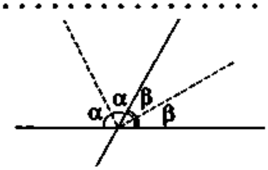
4. Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых пересекаются под углом 90°.



Обозначив соответствующие односторонние углы через 2α и 2β, легко получить $\alpha + \beta = 90°$.

Практически таким же выглядит обоснование следующего факта (проведите его самостоятельно).

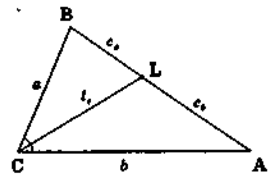
5. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.



6. Полезно знать *две формулы для биссектрисы:*

$$l_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}, \qquad (4)$$

$$l_c^2 = ab - c_a c_b. \qquad (5)$$



Первую из этих формул мы фактически вывели алгебраическим путём при решении последней задачи предыдущего параграфа. Докажите её самостоятельно, рассмотрев площадь ΔABC как сумму площадей треугольников CBL и LCA.

Покажем, как выводится вторая формула: $CL^2 = CB\cdot AC - BL\cdot LA$. Обозначив $\angle CLA$ через α, запишем теорему косинусов для треугольников CAL и BLC: $b^2 = l_c^2 + c_b^2 - 2l_c c_b\cos\alpha$, $a^2 = l_c^2 + c_a^2 + 2l_c c_a\cos\alpha$.

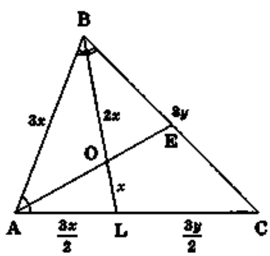
Умножим первое уравнение на c_a, второе — на c_b и сложим: $b^2c_a + a^2c_b = l_c^2(c_a + c_b) + c_b^2c_a + c_a^2c_b$. Учитывая, что $ac_b = bc_a$ (свойство биссектрисы), получим: $ab(c_a + c_b) = l_c^2(c_a + c_b) + c_ac_b(c_a + c_b)$. Осталось только сократить на $c = c_a + c_b$ и перенести слагаемые.

Приведём пример задачи, в которой решение без использования формулы (5) выглядело бы более сложным (ещё одна задача, где применялась эта формула, встречалась в §1.1).

Задача 5 (*МГУ, ф-т психолог., 1995*). В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AE углов ABC и BAC соответственно, которые пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BL$, периметр треугольника равен 28, $BO = 2\cdot OL$. Найти AB.

Решение. 1) Обозначим $OL = x$. Тогда $OB = 2x$, $AB = 3x$, $AL = {}^{3x}/_{2}$ (теорема о биссектрисе).

2) Обозначим $BC = 3y$. Тогда, учитывая что BL — биссектриса $\angle B$, получим $LC = {}^{3y}/_{2}$.



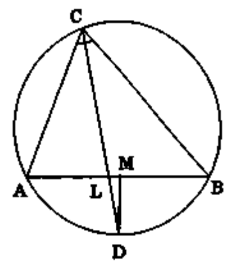
3) По условию $\frac{3x}{2} + 3x + \frac{3y}{2} + 3y = 28$, или $x + y = \frac{56}{9}$.

4) В качестве второго замыкающего соотношения запишем формулу для биссектрисы (5): $(3x)^2 = 3x\cdot 3y - \frac{3x}{2}\cdot\frac{3y}{2}$. Несложные алгебраические действия дают $AB = 8$.

Заметим, что к этому же ответу (но после более громоздких выкладок) можно было бы прийти, записав теорему косинусов для ΔABC, предварительно найдя $\cos\angle BAC = \frac{1}{4}$ из равнобедренного ΔABL.

Ответ: 8.

Рассмотрим ещё одну интересную геометрическую конструкцию, связанную с понятием биссектрисы треугольника. Для этого опишем вокруг ΔABC окружность и продолжим биссектрису CL до пересечения с этой окружностью в точке D.



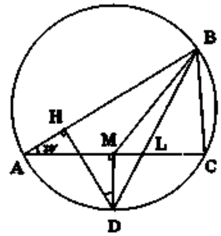
Если теперь соединить эту точку с серединой M стороны AB, несложно доказать перпендикулярность MD и AB. В самом деле: дуги AD и DB равны, следовательно, хорды AD и DB равны, в результате получается, что DM — медиана в равнобедренном ΔABD.

Этот факт встречается также в виде обратного утверждения, помогающего «увидеть окружность», неявно заданную в условии задачи.

7. Биссектриса угла C треугольника ABC пересекается с серединным перпендикуляром к противолежащей стороне AB в точке D, которая принадлежит окружности, описанной вокруг ΔABC.

Для обоснования этого утверждения необходимо знать, что серединный перпендикуляр к любой хорде окружности всегда проходит через точки, делящие дуги окружности, стягиваемые этой хордой, на две равные части. Попробуйте завершить доказательство самостоятельно.

Задача 6. Треугольник ABC вписан в окружность. Из вершины B проведены медиана BM и биссектриса BL, пересекающая окружность в точке D. Из точки D на сторону AB опущен перпендикуляр DH. Определить величину угла HDM, если $\angle BAC = 30°$.



Решение. 1) $DM \perp AC$ (докажите самостоятельно);

2) $DH \perp AB$ (по условию);

3) Поэтому углы HDM и BAC равны (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами).

Ответ: 30°

Следующие несколько фактов связаны с внешней областью треугольника.

8. Обозначим через L точку пересечения *биссектрисы внешнего угла* B треугольника ABC с продолжением его стороны AC за точку C (рис. 1). Тогда верно следующее соотношение: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AL}{LC}$. **(6)**

И снова напомним, что точно таким же соотношением определяется основное свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC (рис. 2).

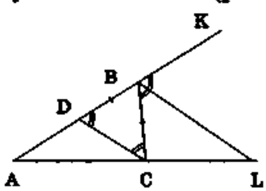


Рис. 1

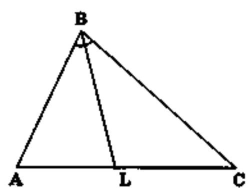
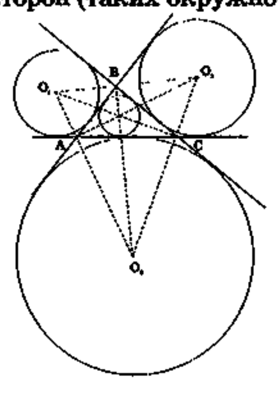


Рис. 2

Для обоснования соотношения (6) сделаем следующее дополнительное построение: через точку C проведем прямую, параллельную BL, до пересечения с AB в точке D (рис. 1). Тогда $\angle BDC = \angle KBL$ (как соответственные углы при параллельных прямых CD и BL), $\angle LBC = \angle BCD$ (как накрест лежащие углы при тех же прямых), $\angle CBL = \angle LBK$ (по условию). Следовательно, ΔDBC —

равнобедренный и $DB = BC$. Воспользовавшись далее теоремой Фалеса $\frac{AB}{BD}=\frac{AL}{LC}$, получим искомое равенство.

9. Аналогично понятию вписанной в треугольник окружности в планиметрии существует также понятие *вневписанной окружности* — окружности, касающейся одной из сторон ΔABC и продолжений двух его других сторон (таких окружностей три). Центр каждой из этих окружностей лежит на пересечении биссектрис внутреннего угла и внешних углов при двух других вершинах треугольника. Как и в случае центра вписанной окружности, такое пересечение в каждом из трёх случаев единственно. Таким образом, *на плоскости существуют ровно четыре точки, равноудаленные от прямых AC, BC и AB — центр вписанной в ΔABC окружности и три центра вневписанных окружностей для этого треугольника.*

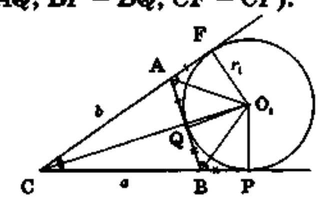


10. Обозначив через P и F точки касания вневписанной окружности ΔABC со сторонами угла C, через Q — точку касания этой окружности со стороной AB, легко показать, что:

а) *полупериметр треугольника ABC равен длине касательной, проведенной из точки C к этой окружности:* $p = CP = CF$ (следует из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки: $AF = AQ$; $BP = BQ$; $CF = CP$).

б) *площадь треугольника ABC вычисляется по формуле* (здесь r_1— радиус вневписанной окружности с центром O_1):

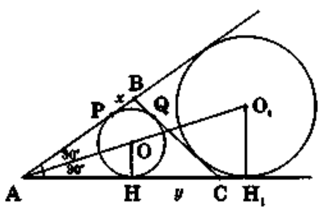
$$S=\frac{a+b-c}{2}\cdot r_1=(p-c)\cdot r_1 \qquad (7)$$



Эта формула является аналогом известной формулы, выражающей площадь треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности. Для её доказательства площадь ΔABC необходимо представить в виде суммы площадей треугольников CAO_1 и CBO_1, уменьшенной на величину площади ΔAO_1B. Во всех этих трёх треугольниках r_1 будет высотой.

Рассмотрим пример.

Задача 7. Радиус окружности, вписанной в угол A и касающейся стороны BC треугольника ABC, равен $\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника, если $BC = 2$, $\angle A = 60°$.



Решение. Своеобразная формулировка задачи наводит на мысль, что речь здесь идёт не обязательно о вписанной окружности. Действительно, таких окружностей может быть две.

Рассмотрим сначала случай, когда заданная в условии окружность вписана в ΔABC. Учитывая, что её центр O лежит на биссектрисе угла A, в прямоугольном ΔAOH (H — точка касания) найдём $AH = \sqrt{3}\cdot\mathrm{ctg}30°$. Обозначив через P и Q две другие точки касания и введя неизвестные $PB = BQ = x$; $CH = CQ = y$ (равенство отрезков здесь следует из условия касания), получим для определения x и y систему двух уравнений: $x + y = 2$ (по условию), $(3+x)^2 + (3+y)^2 - 2\cdot(3+x)(3+y)\cdot\frac{1}{2} = 2^2$ (теорема косинусов в ΔABC).

Эта система не имеет действительных решений, а следовательно, такая конфигурация невозможна. Да это и понятно. Ведь, соединив точки P и H, мы получим равносторонний ΔAPH со стороной $PH = 3$. Но BC должно быть больше PH, что противоречит условию.

Если же рассмотреть ситуацию, когда окружность будет вневписанной, то полупериметр треугольника будет равен $AH_1 = 3$, а искомую площадь легко найти по формуле (7).

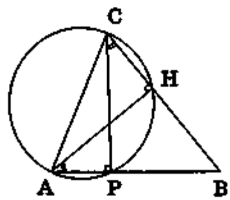
В итоге: $S = (3-2)\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

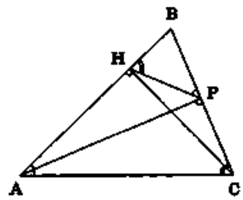
Высота

Высота — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или её продолжение. Главное свойство этого геометрического объекта — «создание» прямоугольных треугольников, рассмотрение которых приводит к определённым выводам:

1. *Треугольники AHB и CPB подобны* (как прямоугольные с общим углом B), коэффициент подобия равен отношению соответствующих высот ΔABC, *углы PCB и HAB равны.*



2. *Точки A, C, H и P лежат на дуге одной окружности, диаметром которой является сторона AC* (следует из свойств прямоугольного треугольника).

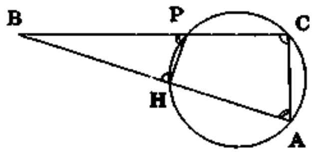


3. *Если в остроугольном треугольнике ABC провести высоты CH и AP, получим треугольник PBH, подобный ΔABC с коэффициентом подобия $k = \cos B$.*

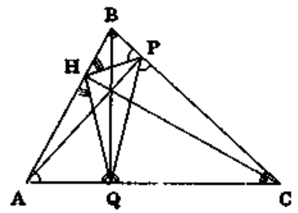
Докажем это. 1) ΔBHC — прямоугольный $\Rightarrow \cos B = \frac{HB}{BC}$;2) ΔAPB — прямоугольный $\Rightarrow \cos B = \frac{BP}{AB}$; 3) треугольники PBH и ABC имеют общий угол B и пропорциональные стороны $\frac{HB}{BC} = \frac{BP}{AB}$ $= \cos B$, а значит, они подобны (второй признак подобия треугольников), что и требовалось доказать. Кроме того, доказано, что в такой геометрической конфигурации: $\angle BPH = \angle A$; $\angle BHP = \angle C$.

Заметим, что рассмотренное свойство высот в задачах обычно используется в остроугольных треугольниках, когда высоты CH и AP «падают» на стороны AB и BC, а не на их продолжения. Однако оно верно для любого типа треугольников (только $k = |\cos\beta|$). Попробуйте это доказать самостоятельно.

В разделе 3 будет показано, что подобие треугольников ABC и PBH — это всего лишь частный случай более общего геометрического факта — подобия соответствующих треугольников, образованных двумя секущими, проведёнными из одной точки B к окружности.



4. *Если в треугольнике ABC провести все три высоты AP, BQ и CH, то, соединив их основания P, Q и H, получим треугольник, в котором высоты исходного ΔABC будут биссектрисами соответствующих углов.*

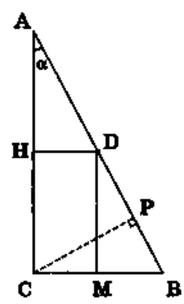


Докажем этот факт для отрезка BQ, обозначив для удобства $\angle B=\beta$. Используя предыдущее свойство заметим подобие треугольников ABC и AHQ (т.е. $\angle HQA=\beta$), а также треугольников ABC и PQC (т.е. $\angle PQC=\beta$). Следовательно, $\angle HQB=\angle BQP=90^\circ-\beta$, а значит, QB — биссектриса $\angle HQP$. Отметим, что ту же величину имеют также углы BAP и HCB.

И в заключение рассмотрим несколько задач «на высоты».

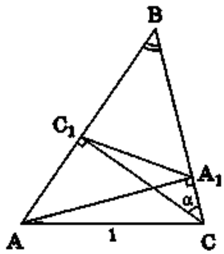
Задача 8. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB=c$, $\angle BAC=\alpha$. Точка D расположена на гипотенузе AB и имеет наименьшую, по сравнению с другими точками отрезка AB, сумму квадратов расстояний до прямых AC и BC. Найти CD.

Решение. Расстоянием от точки до прямой является длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к заданной прямой. Этот отрезок имеет наименьшую из возможных длин отрезков, соединяющих заданную точку с произвольной точкой прямой. Поэтому для произвольной точки D отрезка AB перпендикуляры DM и DH — расстояния от D до соответствующих прямых BC и AC. Используя теорему Пифагора и свойство диагоналей прямоугольника, имеем: $DM^2+DH^2=HM^2=CD^2$.



Эта величина будет минимальной при наименьшем из возможных значений длины отрезка CD, что выполняется в случае, когда точка D — основание перпендикуляра, проведенного из C к гипотенузе AB. Вывод: необходимо найти высоту CP треугольника, проведённую из вершины прямого угла к гипотенузе. Это уже несложно. Из ΔABC: $AC = c\cdot\cos\alpha$, из ΔAPC: $CP = AC\cdot\sin\alpha = c\cdot\sin\alpha\cos\alpha$. **Ответ:** $c\cdot\sin\alpha\cos\alpha$.

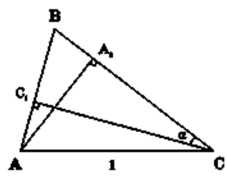
Задача 9. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и боковую сторону, равны соответственно m и n. Найдите стороны треугольника.



Решение. Обозначим $HC = x$, тогда $AC = 2x$, $BC=\sqrt{x^2+m^2}$. Записав площадь треугольника двумя различными способами: $S = mx = \dfrac{n\sqrt{x^2+m^2}}{2}$, получим $x^2 = \dfrac{m^2n^2}{4m^2-n^2}$.

Ответ: $\dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}, \dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$.

Задача 10 (*МГУ, ф-т психолог., 1993*). В остроугольном ΔABC проведены высоты CC_1 и AA_1, Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.



Решение. 1) Из ΔC_1CB: $\angle B = 90^\circ - \alpha$;

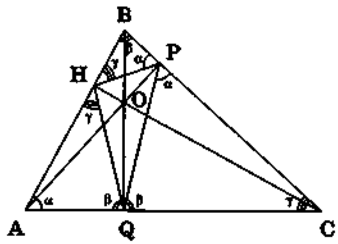
2) $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$, $k = \cos B = \sin\alpha \Rightarrow$

$A_1C_1 = \sin\alpha$; 3) В ΔA_1BC_1: $R = \dfrac{A_1C_1}{2\sin B} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$;

4) Искомая площадь $S = \pi R^2$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$.

Задача 11 (*МГУ, эконом. ф-т, 1993*). Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найти площадь треугольника.



Решение: Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C; углы — буквами α, β, γ; основания высот — H, P, Q; ортоцентр — O.

1) $17^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow \Delta HPQ$ — прямоугольный, $\angle PHQ = 90°$;

2) Т.к. AP и BQ — высоты, то $\Delta PQC \sim \Delta ABC$, $k = \cos\gamma$. Поэтому $\angle QPC = \angle BAC = \alpha$, $\angle PQC = \angle ABC = \beta$. Аналогичные соотношения имеют место в ΔAHQ и ΔBHP.

3) Т.к. $\angle BHA = 180°$, то $2\gamma = 180° - 90° \Rightarrow \angle C = 45°$;

4) Если обозначить искомую площадь ABC через S, то из подобия следует: $S_{\Delta PQC} = S\cdot\cos^2\gamma$, $S_{\Delta HQA} = S\cdot\cos^2\alpha$, $S_{\Delta BHP} = S\cdot\cos^2\beta$. Кроме того, $S_{\Delta HPQ} = \dfrac{8\cdot 15}{2} = 60$.

Поэтому имеем равенство: $S = S(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 60$.

5) Из ΔHPQ имеем $\cos(180° - 2\alpha) = \dfrac{8}{17}$, $\cos(180° - 2\beta) = \dfrac{15}{17}$. Отсюда $\cos 2\alpha = -\dfrac{8}{17}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{9}{17\cdot 2}$, $\cos 2\beta = -\dfrac{15}{17}$, $\cos^2\beta = \dfrac{1}{17}$.

6) Поэтому $S = S\left(\dfrac{9}{17\cdot 2} + \dfrac{1}{17} + \dfrac{1}{2}\right)$. Отсюда $S = 340$.

Ответ: 340.

Мы рассмотрели достаточно сложную планиметрическую задачу, решение которой для многих абитуриентов «казалось совершенно невозможным». Видим, что знание свойств основных элементов треугольника сделало это решение вполне приемлемым. Кроме того, здесь использовано сравнение площадей треугольников, входящих в конфигурацию. Это довольно распространённый способ решения планиметрических задач — ему посвящён следующий параграф.

Задачи для самостоятельного решения

1. Прямая линия, проходящая через вершину C параллельно биссектрисе BD внутреннего угла треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB в точке K. Через вершину B проведена произвольная прямая линия L. Доказать, что прямая CK перпендикулярна L тогда и только тогда, когда прямая L делит внешний угол B треугольника ABC пополам.

2. Из вершины C треугольника ABC параллельно биссектрисе BD проведена прямая, пересекающая продолжение стороны AB за точку B в точке K. Отрезок AK равен 2, радиус окружности, описанной вокруг треугольника AKC, равен 1, угол AKC равен 30°. Найти периметр треугольника ABC.

3. Найти площадь ΔABC, если $AB = 3$, $BC = 7$ и длина медианы BM равна 4.

4 *(МГУ, филологич. ф-т, 2003)*. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найти все углы треугольника ABC и площадь четырёхугольника $NBMD$, если основание $AC = 1$.

5 *(МГУ, физич. ф-т, 1996)*. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найти биссектрису AD.

6 *(МГУ, ИСАА, 2002)*. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = 8$, $BC = 6$ и биссектриса $BD = 6$. Найдите длину медианы AE.

7 *(МГУ, ф-т почвовед., 1999)*. Дан треугольник ABC с основанием AB, равным $\frac{\sqrt{3}}{2}$, и высотой CH, опущенной на это основание и равной $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Известно, что точка H лежит на AB и $AH : HB = 2 : 1$. В угол ABC вписана окружность, центр которой лежит на высоте CH. Найти радиус этой окружности.

8 *(МГУ, ВМК, 1973)*. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM. Найти площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

9 *(МГУ, географ. ф-т, 2000)*. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причем $BM = BN$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N — прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P и делит ее на отрезки $AP = 5$ и $PC = 4$. Найдите длину отрезка BP, если известно, что длина отрезка BC равна 6.

10. Доказать, что биссектрисы данного треугольника являются высотами в треугольнике с вершинами расположенными в центрах вневписанных около данного треугольника окружностей.

§ 1.5. МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

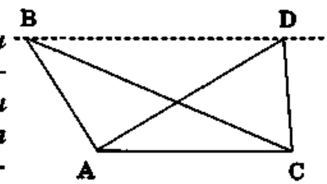
Понятие площади — одно из ключевых в геометрии. И не только потому, что вычисление площади часто является целью решения задачи, её итогом. Уже не раз при решении задач в предыдущих параграфах мы видели, что площадь может выполнять также «посреднические» функции. Выразив с помощью формул для площадей из §1.1 площадь треугольника различными способами, мы получаем недостающее замыкающее соотношение или, используя те же формулы, выражаем один элемент геометрической конструкции (например, высоту) через какие-то другие её элементы.

Однако площадь может сама являться главным источником информации о взаимном расположении линий на плоскости, о соотношениях между длинами различных отрезков и, как следствие, о более точной геометрической структуре исследуемой задачи. Метод получения информации о геометрической конфигурации задачи, использующий понятие площади, является прекрасным инструментом, которым должен владеть каждый исследователь.

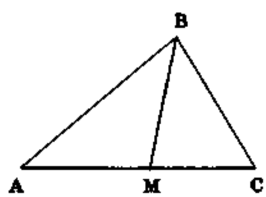
В основе метода лежит несколько хорошо известных геометрических фактов.

1. Следствия из формулы $S = \dfrac{ah_a}{2}$:

а) *Площади треугольников ABC и ADC относятся, как высоты, проведённые к основанию AC. Площади этих треугольников равны, когда их вершины B и D лежат на прямой, параллельной основанию AC.*

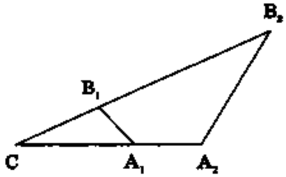


б) *Отношение площадей треугольников с общей вершиной и основаниями, лежащими на одной прямой, равно отношению длин их оснований:* $S_{ABM} : S_{MBC} = AM : MC.$ (1)



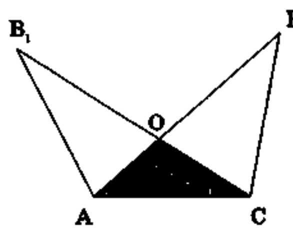
2. Следствие из формулы $S=\frac{1}{2}ab\sin C$:

Площади треугольников A_1B_1C и A_2B_2C с общим углом при вершине C относятся как произведение отношений соответствующих сторон:



$$\frac{S_{A_1B_1C}}{S_{A_2B_2C}}=\frac{A_1C}{A_2C}\cdot\frac{B_1C}{B_2C}. \qquad (2)$$

3. *Площадь фигуры аддитивна* (т.е. с ней *можно совершать простейшие арифметические операции* — сложение, вычитание, умножение и деление на действительной число). *Равенство площадей фигур, имеющих общую часть, равносильно равенству площадей фигур без общей части:* $S_{AB_1C}=S_{AB_2C}\Leftrightarrow S_{AB_1O}=S_{CB_2O}$.



Необходимо также знать распространённые приложения, напрямую следующие из приведённых фактов. Перечислим некоторые из них.

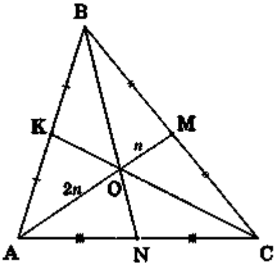
4. *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.*

5. *Биссектриса делит треугольник на два других треугольника, площади которых пропорциональны соответствующим сторонам треугольника, прилежащим к биссектрисе.*

6. *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента их подобия.*

7. *Медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.*

Обоснование последнего утверждения, в силу его поучительности, проведем двумя способами, используя различные свойства площадей.



1 способ: $BM = MC \Rightarrow S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$;

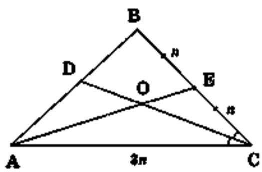
$OM = \frac{1}{3}AM \Rightarrow S_{OMC} = \frac{1}{3}S_{AMC} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

2 способ: $AO = \frac{2}{3}AM$, $AN = \frac{1}{2}AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{AON}}{S_{AMC}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{AON} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

Рассмотрим теперь задачи на прямое вычисление площадей фигур с использованием всех приведённых выше фактов.

Задача 1. В треугольнике ABC с площадью, равной 1, медианой AE и биссектрисой CD, $BC : AC = 2 : 3$. Найти площадь четырехугольника $BEOD$, где O — точка пересечения AE и CD.



Решение. Искомая площадь является частью площади треугольника ABE. Используем это в решении. Обозначим для наглядности $BE = EC = n$, тогда $AC = 3n$ (по условию).

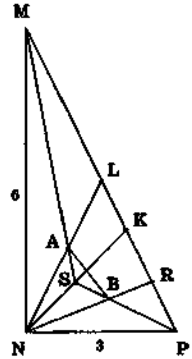
1) $S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}$ (т.к. AE — медиана).

2) $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$; $\frac{AO}{OE} = \frac{3}{1}$ (т.к. CD является биссектрисой угла сразу в двух треугольниках ABC и AEC) $\Rightarrow \frac{S_{ADO}}{S_{ABE}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$; $S_{ADO} = \frac{9}{40}$.

3) $S_{BEOD} = S_{ABE} - S_{AOD} = \frac{1}{2} - \frac{9}{40} = \frac{11}{40}$. **Ответ:** $\frac{11}{40}$.

Обратите внимание, что «строить» решение можно было бы, определив искомую площадь как часть площади треугольника DBC. Однако тогда для вычисления S_{COE} как части S_{DBC} нам потребовалось бы отношение $DO : OC$. В следующем параграфе будет предложена процедура определения таких отношений.

Задача 2 (*МГУ, геолог. ф-т, 1997*). В треугольнике MNP угол N прямой, $MN = 6$, $NP = 3$. Точка K лежит на стороне MP, A и B — точки пересечения медиан, соответственно, в треугольнике MNK и KNP. Найти площадь треугольника NAB.



Решение. Проведем медианы NL и MS в ΔNMK, NR и PS в ΔNKP. Тогда:

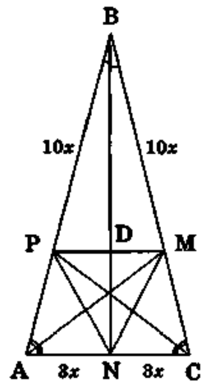
1) по свойству медиан треугольника $\frac{NA}{NL}=\frac{NB}{NR}==\frac{2}{3}$ $\Rightarrow \Delta NAB \sim \Delta NLR$ (общий угол и пропорциональные стороны — $k=\frac{2}{3}$) $\Rightarrow S_{NAB}=\frac{4}{9}S_{NLR}$.

2) $S_{NLR}=\frac{1}{2}S_{NMP}$ (т.к. $LR=LK+KR=\frac{MK}{2}+\frac{KP}{2}=\frac{MP}{2}$).

3) $S_{MNP}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$, $S_{NAB}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot 9=2$.

Ответ: 2.

Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведены биссектрисы AM, BN и CP. Найти площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна 64, а $\cos\angle BAC=0{,}3$.



Решение. Заметим сразу, что искомая площадь может быть получена, если из площади треугольника ABC вычесть площади треугольников PBM, MCN и APN. Учитывая, что BN в ΔABC является биссектрисой, медианой и высотой, удобно обозначить $AN=NC=3x$, тогда $AB=BC=10x$ (т. к. $\cos\angle BAC=\frac{AN}{AB}$). По свойству биссектрисы CP:

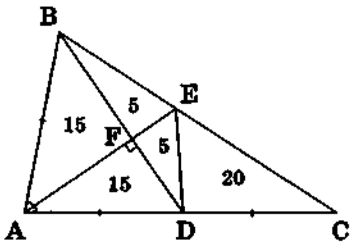
$\frac{AP}{PB}=\frac{6x}{10x}=\frac{3}{5}$. Аналогично $\frac{MC}{BM}=\frac{3}{5}$, из чего сразу следует подобие треугольников ABC и PBM (общий угол и пропорциональные стороны: $k=\frac{5}{8}$), а также равенство треугольников APN и NMC (по двум сторонам и углу между ними).

Площади этих треугольников легко вычислить через площадь ΔABC: $S_{PBM}=\left(\frac{5}{8}\right)^2 S_{ABC}=25$, $S_{APN}=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{8}S_{ABC}=12=S_{NMC}$. В итоге $S_{MNP}=64-25-2\cdot 12=15$.

Ответ: 15.

И снова внимательный читатель легко найдёт более короткий путь решения. В самом деле, если треугольники ABC и PBM подобны, то $PM=\frac{5}{8}AC$, а высота $BD=\frac{5}{8}BN$. Поэтому $S_{MNP}=\frac{1}{2}PM\cdot DN=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}AC\cdot\frac{3}{8}BN=\frac{15}{64}S_{ABC}=15.$

Задача 4. В треугольнике ABC медиана BD и биссектриса AE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Площадь треугольника DEF равна 5. Найти площадь треугольника ABC.



Решение. 1) В ΔABD биссектриса AF является высотой $\Rightarrow BF = FD \Rightarrow S_{BEF}=S_{DEF}=5$, $S_{BED}=10$.

2) $AB=AD=DC \Rightarrow BE:EC=1:2$ (т.к. AE — биссектриса) $\Rightarrow S_{EDC}=2S_{BED}=20$, $S_{BDC}=30$.

3) $AC=2DC \Rightarrow S_{ABC}=2S_{BDC}=60$.

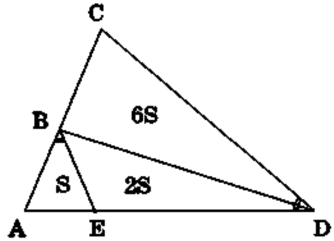
Ответ: 60.

Интересно отметить, что если бы в задаче спрашивалось отношение $AF:FE$, его легко можно было бы получить из уже имеющейся информации о площадях. Действительно, $S_{ABD}=30$, $S_{ABF}=\frac{1}{2}S_{ABD}=15$, $S_{BEF}=5 \Rightarrow AF:FE=3:1$.

Изучению именно такой процедуры геометрического исследования мы посвятим разбор следующих задач параграфа.

Задача 5. В треугольнике ACD точка B принадлежит отрезку AC, точка E — отрезку AD. При этом справедливо отношение площадей треугольников $S_{ABE}:S_{BED}:S_{BDC}=1:2:6$. Определить отношения длин отрезков $BC:ED$ и $BE:CD$, если величины углов ABE и ADC равны.

Решение. Обозначим $S_{ABE} = S$, тогда $S_{BED} = 2S$, $S_{BDC} = 6S$.

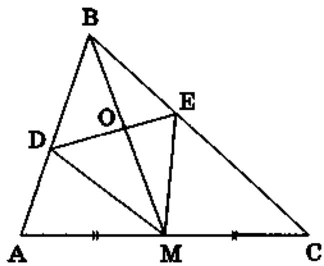


1) $S_{ABE} : S_{BED} = 1 : 2 \Rightarrow AE : ED = 1 : 2$; $S_{ABD} : S_{BDC} = 3 : 6 \Rightarrow AB : BC = 1 : 2$. $\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta ACD$ (общий угол и пропорциональные стороны), $k = \dfrac{1}{3} = \dfrac{BE}{CD}$.

2) $\angle AEB = \angle ADC$ (из подобия треугольников), $\angle ABE = \angle ADC$ (по условию) $\Rightarrow \Delta ABE$ — равнобедренный, ΔACD — аналогично $\Rightarrow BC = ED$. **Ответ:** 1 : 1, 1 : 3.

Задача 6. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AB, точка E — на стороне BC, точка M — середина стороны AC. При этом площадь четырёхугольника $ABEM$ равна площади четырёхугольника $DBCM$. Найти отношение $DO : OE$, где O — точка пересечения отрезков DE и BM.

Решение. 1) Четырёхугольники $ABEM$ и $DBCM$ имеют общую часть $DBEM$, а значит, в силу равенства их площадей, равны и площади треугольников ADM и EMC.

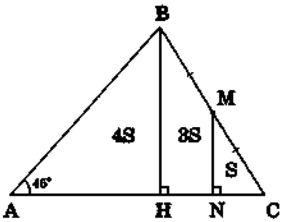


2) $S_{ADM} = S_{EMC}$, поэтому точки D и E лежат на прямой, параллельной AC.

3) Из подобия (по двум углам) двух пар треугольников DOB с AMB и EOB с CMB следует $\dfrac{DO}{AM} = \dfrac{BO}{BM} = \dfrac{OE}{MC} \Rightarrow DO = OE$. **Ответ:** 1:1.

Задача 7 (*МГУ, химич. ф-т, 1972*). В треугольнике ABC угол A равен $45°$, а угол C — острый. Из середины M стороны BC опущен перпендикуляр MN на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как 1 : 8. Найти углы треугольника ABC.

Решение. Проведём из вершины B высоту BH. Т. к. по условию угол C — острый, точка H принадлежит отрезку AC. Обозначим через $S = S_{MNC}$, тогда $S_{ABC} = 8S$.



1) $\Delta MNC \sim \Delta BHC$ (по двум углам), $k=\dfrac{1}{2}$

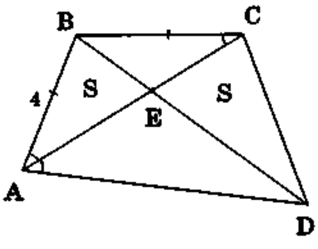
$\Rightarrow S_{CHB}=4S \Rightarrow S_{ABH}=4S.$

2) $S_{CHB}=S_{ABH}$, поэтому $AH = HC$ (т.к. вершина B — общая).

4) BH — высота (по построению) и медиана $\Rightarrow \Delta ACB$ — равнобедренный. Значит, $\angle C=45°, \angle B=90°$. **Ответ: 45°, 45°, 90°.**

Описанная методика определения геометрической конфигурации с помощью информации, полученной путем сравнения площадей фигур, позволяет решать множество задач различной степени сложности. Разберём в заключение задачу, в которой комбинация методик этого и предыдущего параграфов, делает решение коротким и изящным.

Задача 8 (*МГУ, эконом. ф-т, 1985*). В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка E — точка пересечения диагоналей. Известно, что площади треугольников ABE и CDE равны между собой, диагональ AC является биссектрисой угла A, $AB = 4$. Найти BC.



Решение. 1) Рассмотрим треугольники ABD и ACD. Они имеют общую часть — треугольник AED — и равные по условию две другие площади. Следовательно, их площади равны. А т. к. основание AD у них общее, то вершины B и C должны лежать на прямой, параллельной AD, т.е. $ABCD$ — трапеция (или параллелограмм).

2) Биссектриса AC, пересекая прямую BC, параллельную одной из сторон угла A, как мы показывали ранее, всегда «формирует» равнобедренный треугольник ABC. В результате $BC = AB = 4$.

Задача решена. **Ответ: 4.**

Заметим, кстати (хотя об этом и не спрашивается в задаче), что заданная в условии фигура может быть квадратом, ромбом или трапецией. Подумайте почему.

В следующем параграфе мы разберём ещё одну интересную методику, часто встречается в геометрических задачах вместе с изученным методом площадей.

Задачи для самостоятельного решения

1. На прямой L даны три точки A, B и C. Найти отношение расстояний от точек D и F до прямой L, если $S_{ADC} : S_{AFB} = 2:1, AB : AC = 1:2$.

2. Точка K лежит на стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ и делит её в отношении 1:3, считая от вершины A. Известно, что $S_{ABK} : S_{DCK} = 1:3$. Доказать, что $BC \parallel AD$.

3. Точка L лежит на стороне BC треугольника ABC. Точка K принадлежит отрезку AL. Доказать, что $S_{ABK} \cdot S_{KLC} = S_{ACK} \cdot S_{KLB}$.

4 *(МГУ, филологич. ф-т, 1999)*. В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найти площадь четырёхугольника $KCDL$, если площадь треугольника ABC равна 24.

5. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN. Найти его площадь, если $AM = m$, $BN = n$.

6. В треугольнике ABC медиана AM и биссектриса CL пересекаются в точке O под прямым углом. Найти площадь треугольника LMO, если $S_{ABC} = 1$.

7. Определить площадь треугольника, если две стороны соответственно равны 27 и 29, а медиана третьей стороны равна 26.

8 *(МГУ, ф-т психолог., 1974)*. Точки E, F, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC. Отрезок AE составляет 1/3 стороны AB, отрезок BF составляет 1/6 стороны BC, отрезок AM составляет 2/5 стороны AC. Найти отношение площади треугольника EFM к площади треугольника ABC.

9 *(МГУ, физич. ф-т, 1997)*. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M, а сторону AC в точке N. Площадь треугольника MCN в два раза больше площади трапеции $ABMN$. Найти $CM : MB$.

10. Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC проведены три прямые, параллельные его сторонам. Площади образовавшихся при этом треугольников равны S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника ABC.

§ 1.6. ПОДОБИЕ, ТЕОРЕМА ФАЛЕСА, ПЕРЕНОС ПРОПОРЦИЙ ВНУТРИ ТРЕУГОЛЬНИКА

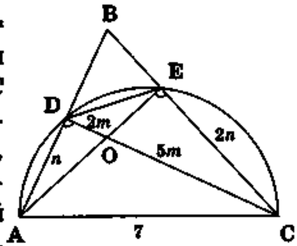
Образование подобных фигур (в основном треугольников) — явление в планиметрии достаточно распространенное. Они могут возникать в результате дополнительных построений, например, проведения прямых, параллельных или перпендикулярных заданным, а могут быть и неявно заданы в условии. Задача решающего при этом состоит в том, чтобы их «увидеть», предварительно проведя анализ-сравнение всех входящих в геометрическую конструкцию углов и отрезков. Иногда, как, например, в задачах предыдущего параграфа, информацию о подобии можно получить и из сравнения площадей фигур, результатом которого могут оказаться нужные для подобия пропорции.

После того как подобие зафиксировано и обосновано (при этом, конечно, надо хорошо знать все три признака подобия треугольников), следует перенос информации из одного треугольника в другой. Прежде всего, он затрагивает отрезки сторон и углы треугольников. Поэтому с помощью подобия иногда удаётся «связать» совершенно разрозненные отрезки геометрической конструкции, а из равенства соответствующих углов можно вдруг неожиданно «увидеть» параллельность заданных в условии прямых и, тем самым, существенно продвинуться в решении задачи.

Мы не будем здесь рассматривать случаи, когда подобие прямо «бросается в глаза» и его невозможно не заметить — такие случаи уже встречались и ещё не раз будут встречаться при решении задач в этом пособии. Обратим внимание лишь на две распространённые ошибки, которые допускаются учащимися при решении задач на подобие.

Ошибка первая — результат невнимательности, неакцентированного подхода при рассмотрении подобных треугольников и, как следствие, путаница в сторонах при записи соответствующих отношений подобия, неверное определение коэффициента подобия. Покажем это на следующем примере.

Задача 1. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, на стороне BC — точка E так, что $\angle BDC + \angle AEC = 180°$. Отрезки AE и DC пересекаются в точке O. При этом $AD : EC = 1 : 2$, $DO : OC = 2 : 5$, $AC = 7$. Найти DE.



Решение. Обозначим для удобства $AD = n$, $EC = 2n$, $DO = 2m$, $OC = 5m$. Из условия задачи легко следует равенство углов ADC и AEC ($\angle ADC = 180° - \angle BDC$), опирающихся на одно основание, что, в свою очередь, говорит о том, что точки D и E принадлежат дуге одной окружности, стягиваемой хордой AC (факт известный и очень распространённый в задачах с окружностями). Из этого сразу же следует равенство углов DEA и DCA (как вписанных, опирающихся на одну дугу AD) и подобие по двум углам двух пар треугольников: ADO и CEO, а также DEO и ACO. Зная коэффициент подобия в последней паре треугольников и то, что $AC = 7$, несложно найти DE. Однако определение этого коэффициента подобия порой вызывает проблемы.

Обычно у решающих задачу в этом месте количество правильных ответов $\left(k=\dfrac{4}{5}\right)$ примерно равняется количеству неправильных $\left(k=\dfrac{2}{5}\right)$ — «кто что быстрее увидел, то и написал...» Конечно же коэффициент подобия не равен $\dfrac{DO}{OC}=\dfrac{2}{5}$. Элементарная внимательность подсказывает: напротив равных углов DOA и EOC в треугольниках DOA и EOC лежат стороны AD и EC и поэтому $\dfrac{OE}{OD}=\dfrac{2}{1}$, $OE = 4m$, $\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{OE}{OC}=\dfrac{4m}{5m}\Rightarrow DE=\dfrac{28}{5}$. **Ответ:** $\dfrac{28}{5}$.

Другая ошибка — следствие ограниченности восприятия понятия подобия. Часто при использовании понятия подобия школьники думают только о равенстве соответствующих углов и пропорциональности соответствующих сторон. Между тем, напомним следствия из определения подобия плоских фигур [1–9]:

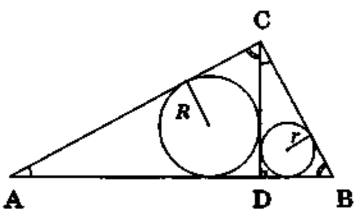
1. *В подобных фигурах углы между любыми сходственными линейными элементами равны, а длины этих элементов относятся как коэффициент подобия k.*

Т. е. не только длины сходственных сторон a_1 и a, но также и длины других сходственных элементов: биссектрис l_1 и l, медиан m_1 и m, высот h_1 и h, периметров P_1 и P, радиусов вписанных r_1 и r и описанных R_1 и R окружностей, относятся как коэффициент подобия: $$\frac{a_1}{a}=\frac{l_1}{l}=\frac{m_1}{m}=\frac{h_1}{h}=\frac{P_1}{P}=\frac{r_1}{r}=\frac{R_1}{R}=k.$$

2. В подобных фигурах площади *любых сходственных элементов относятся как квадрат коэффициента подобия* k^2.

При изучении многоугольников и окружностей мы ещё увидим удобство использования такого «расширенного» варианта понятия подобия.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны соответственно R и r. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.



Решение. Обозначим искомый радиус через x.

1) $\angle DCA=\angle CBD \Rightarrow \Delta CAD \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{p_{CAD}}{p_{BAC}}=\dfrac{R}{x}$;

2) $\angle BCD=\angle BAC \Rightarrow \Delta BCD \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{p_{BCD}}{p_{BAC}}=\dfrac{r}{x}$;

3) Записав площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников BCD и CAD, используя при этом формулу выражения площади треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности, получим: $x\cdot p_{ABC}=r\cdot p_{BCD}+R\cdot p_{CAD}$, или, с учетом 1) и 2), $x\cdot p_{ABC}=r\cdot\dfrac{r}{x}\cdot p_{ABC}+R\cdot\dfrac{R}{x}\cdot p_{ABC}$.

Сделав элементарные преобразования, получим: $x^2=r^2+R^2$.

Ответ: $\sqrt{r^2+R^2}$.

Использование понятия подобия требует хорошо развитой геометрической интуиции. «Увидеть подобие» — это зачастую «увидеть невидимое». Для развития таких качеств на первом этапе обучения полезно познакомиться с несколькими наиболее распространёнными планиметрическими конфигурациями, «выводящими» решение на подобные треугольники. Одну из них (рис. 1) мы достаточно подробно исследовали в § 1.4. Другая (рис. 2), с четырьмя парами подобных треугольников ($\Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2$, $\Delta AC_1C_2 \sim \Delta AB_1B_2$, $\Delta B_1OC_2 \sim \Delta C_1OB_2$, $\Delta B_1OC_1 \sim \Delta B_2OC_2$), будет подвержена тщательному анализу в главе 3 «Окружности».

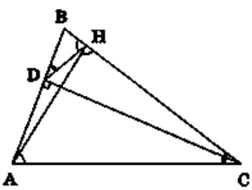


Рис. 1

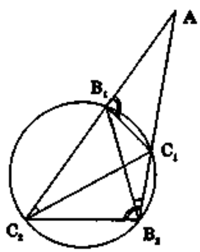


Рис. 2

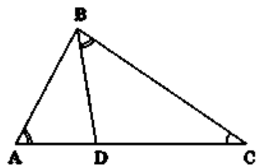


Рис. 3

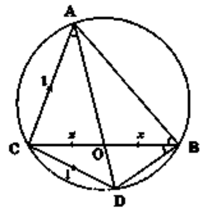
Сейчас же хочется рассмотреть самую, наверное, распространённую геометрическую конструкцию (рис. 3), когда треугольники (в нашем случае это ABC и BDC) имеют общий угол C, а равенство двух других соответствующих углов является следствием анализа-сравнения всех углов, входящих в исследуемую конфигурацию.

Выводы для случая, когда ΔABC — прямоугольный, а BD — его высота, падающая на гипотенузу, ранее нами уже приводились в §1.3.

Рассмотрим на других примерах применение этой конструкции в задачах различной степени сложности.

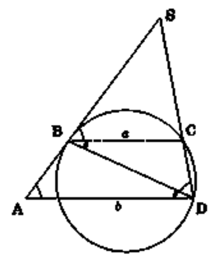
Задача 3 (*МГУ, ф-т психолог., 1985*). Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины A, пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Найти длину отрезка BC, если длина каждой из хорд AC и DC равна 1.

Решение. Соединив точки B и D, получим $\angle ABC = \angle CBD = \angle CAD$ (как углы, опирающиеся на равные дуги, стягиваемые равными хордами AC и CD). Но тогда (здесь O — точка пересечения AD и BC) $\Delta AOC \sim \Delta BAC$ (т.к. $\angle C$ у этих треугольников общий). Откуда, обозначив $CO = OB = x$, получим $\frac{1}{x} = \frac{2x}{1}$. В итоге $x^2 = \frac{1}{2}$, $BC = 2x = \sqrt{2}$. **Ответ:** $\sqrt{2}$.



Задача 4. Окружность проходит через вершины B, C, D трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AB в точке B. Найти BD, если $BC = a$, $AD = b$.

Решение. Достроим трапецию до треугольника с вершиной S. Величины углов SBC (угол между хордой BC и касательной BS) и CDB (вписанный угол, опирающийся на дугу BC) равны половине дуги BC. Из равенства этих углов следует подобие треугольников SBC и SDB с общим углом S.



Из этого подобия получаем $\frac{BD}{a} = \frac{SD}{SB} = \frac{SB}{SC}$, или $BD = \frac{a\cdot SD}{\sqrt{SD\cdot SC}} = a\sqrt{\frac{SD}{SC}} = a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$. При этом равенство $\frac{SD}{SC} = \frac{b}{a}$ следует из очевидного подобия треугольников SBC и SAD.

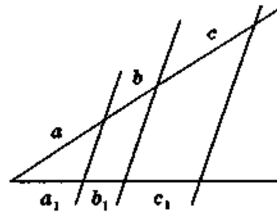
Отметим, что решение этой задачи можно существенно упростить, если заметить совсем не очевидное подобие треугольников ABD и DCB (по двум углам), которое следует из равенства углов SBC, BDC и SAD. Из этого подобия сразу же получается $BD^2 = ab$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Очень распространённым в планиметрии является класс задач, ключевую роль в решении которых играют свойства подобных треугольников, — это задачи, связанные с перенесением отношений длин отрезков (пропорций) из одной части геометрической конструкции в другую её часть, используя для этого заданные в условии или построенные дополнительно параллельные прямые.

В простейшем случае мы эту процедуру наблюдаем, когда две прямые пересекаются серией параллельных прямых.

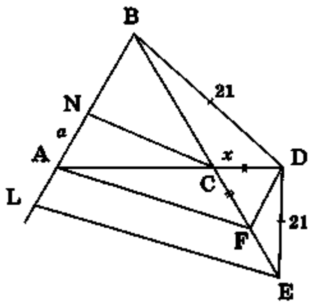
Если a, b, c, a_1, b_1, c_1 — соответствующие длины отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, то при этом $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ или $a:b:c=a_1:b_1:c_1$. (1)



В принципе, эти результаты всегда можно получить из рассмотрения подобных треугольников. Однако геометрический факт, выраженный формулой (1), известный как обобщённая теорема Фалеса, имеет самостоятельный интерес и очень полезен при решении задач.

Рассмотрим одну из них.

Задача 5 (*МИРЭА, 1998*). В равностороннем треугольнике ABC сторона AC продолжена на отрезок CD, а сторона BC на отрезок CE, причем $BD = DE$. На продолжении BC за точкой C взята точка F так, что $CF = CD$, и проведены отрезки CN и EL параллельно FA (здесь точка N — точка на стороне AB; L — на продолжении AB). Известно, что $NL = 15$; $DE = 21$. Найти длины отрезков CF и AN.



Решение. 1) ΔCDF — равносторонний (равнобедренный с углом при вершине $\angle C = 60°$);

2) $\Delta BDC = \Delta DFE$ ($\angle BCD = \angle DFE = 120°$, $\angle DBC = \angle DEF$, $BD = DE$);

3) $BC = FE, NC \parallel AF \parallel LE \Rightarrow BN = AL$ (теорема Фалеса);

4) $BN + AN = AL + AN = NL = 15 \Rightarrow BC = 15$;

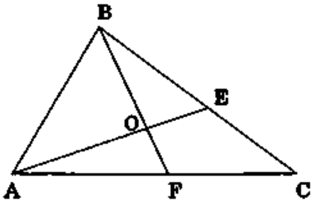
5) Обозначим $DC = x$, тогда $21^2 = x^2 + 15^2 - 2\cdot 15\cdot x\cdot \cos 120°$ (теорема косинусов в ΔBDC), или $x = CD = CF = 9$ (второй корень в этом уравнении — отрицательный);

6) Обозначим $AN = a$, тогда $\frac{AN}{NB} = \frac{a}{15-a} = \frac{CF}{BC} = \frac{9}{15}$ (теорема Фалеса). В итоге $a = \frac{45}{8}$.

Ответ: $9, \frac{45}{8}$.

Перейдем теперь к изучению двух очень важных для геометрических расчётов *модельных задач на перенос пропорций.*

Модель 1. Проведем в треугольнике ABC из любых двух вершин отрезки, концы которых лежат на противоположных этим вершинам сторонах. Пусть это будут AE и BF, пересекающиеся в точке O внутри ΔABC. Этими отрезками в треугольнике создаются *четыре пропорции:* $\frac{BO}{OF}, \frac{AO}{OE}, \frac{BE}{EC}$ и $\frac{AF}{FC}$. Покажем на примерах, что, *зная любые две из них, всегда можно вычислить оставшиеся пропорции.*

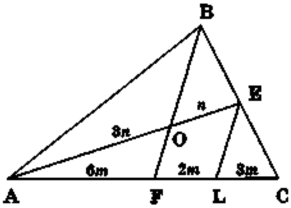


Для этого необходимо сделать следующее дополнительное построение: через одну из точек пересечения O, E или F провести прямую, параллельную либо сторонам треугольника, либо прямым BF и AE. Это построение должно быть тщательно продумано, ибо от того, насколько удачно оно проведено, зависит дальнейшая возможность переноса информации с помощью теоремы Фалеса или свойств подобных треугольников.

Пример 1. Пусть заданы отношения: $\frac{AO}{OE}=\frac{3}{1}, \frac{AF}{FC}=\frac{6}{5}$. Обозначив для удобства $AF = 6m$, $AO = 3n$, получим $FC = 5m$, $OE = n$.

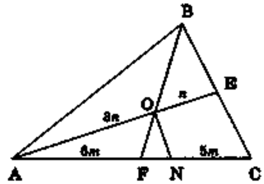
Для определения $\frac{BE}{EC}$ удобно провести прямую $EL \parallel BF$. Тогда по теореме Фалеса $\frac{AF}{FL}=\frac{AO}{OE}=\frac{3}{1}$, $FL = 2m$, а значит $LC = 3m$. Если теперь снова воспользоваться теоремой Фалеса, сразу же получим искомое отношение: $\frac{BE}{EC}=\frac{FL}{LC}=\frac{2}{3}$.

Мы видим, что с помощью специального дополнительного построения создана геометрическая структура, состоящая из двух параллельных прямых, которые пересекают два угла EAC и BCA, имеющие общую сторону AC. Сначала мы с помощью теоремы Фалеса перенесли заданную

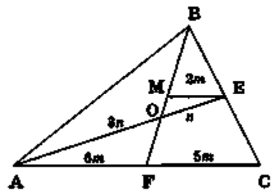


в условии пропорцию с одной стороны угла EAC на их общую сторону, а затем, предварительно рассчитав в одних единицах измерения длины всех получившихся отрезков AF, FL и LC, перенесли эту информацию с помощью той же теоремы на сторону BC второго угла.

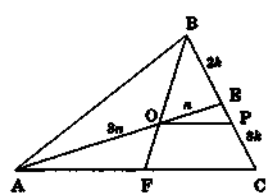
Для определения отношения $\dfrac{BO}{OF}$ можно поступать различными способами.



1) Например, из точки O провести $ON \parallel BC$. И, учитывая, что $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AO}{OE} = \dfrac{3}{1}$, получить $NC = \dfrac{11m}{4}$, $FN = 5m - \dfrac{11m}{4} = \dfrac{9m}{4}$. В итоге, $\dfrac{BO}{OF} = \dfrac{NC}{FN} = \dfrac{11}{9}$. Здесь опять дважды использовалась теорема Фалеса.



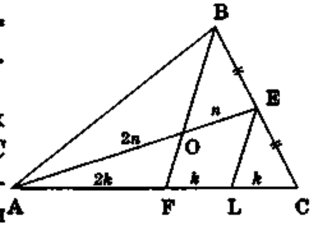
2) Или из точки E провести $EM \parallel AC$ (кстати, данное построение можно использовать и для нахождения $\dfrac{BE}{EC}$). Тогда из подобия треугольников MEO и FAO ($k = 1/3$) получим $ME = 2m$. А из подобия треугольников BME и BFC ($k = 2/5$) $BM : BF = 2 : 5$. Обозначив $BM = 2x$, найдем $MF = 3x$, $MO = \dfrac{3x}{4}$, $BO = 2x + \dfrac{3x}{4} = \dfrac{11x}{4}$, $OF = 3x - \dfrac{3x}{4} = \dfrac{9x}{4}$. В итоге, $\dfrac{BO}{OF} = \dfrac{11}{9}$. Видим, что при таком дополнительном построении информация на BF переносится из двух пар подобных треугольников.



3) Наконец, никто нам не мешает воспользоваться уже полученной ранее информацией о том, что $BE : EC = 2 : 3$. Проведя $OP \parallel AC$, попробуйте самостоятельно перенести информацию с AE на BC, и, пересчитав все его отрезки в одних единицах, с помощью второй раз применённой теоремы Фалеса получить искомое отношение.

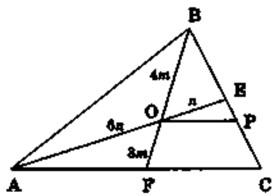
Пример 2. Зададим $AO : OE = 2 : 1$, $BE = EC$. Понятно, что в этом случае BF — медиана. Обосновать этот факт с помощью описанной процедуры не составляет труда.

Проведём $EL \parallel BF$. Тогда $FL : LC = BE : EC = 1 : 1$, $AF : FL = AO : OE = 2 : 1$. Т.е. $AF = 2FL = FC$.



Здесь информация о соотношениях длин отрезков с боковых сторон углов EAC и BCA перенесена с помощью теоремы Фалеса на их общую сторону AC. Искомая пропорция получена после того как все части AC выражены в одних единицах измерения.

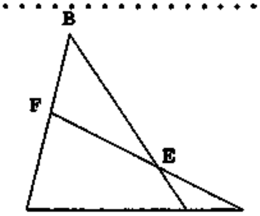
Пример 3. В случае, когда $\frac{AO}{OE}=\frac{6}{1}$, $\frac{BO}{OF}=\frac{4}{3}$, попробуйте получить соотношение $\frac{BE}{EC}$, проведя $OP \parallel AC$.



Для определения $AF : FC$ дополнительное построение выберите сами. Ответ: $\frac{BE}{EC}=\frac{1}{1}$, $\frac{AF}{FC}=\frac{3}{1}$.

Пример 4. Задав $\frac{BE}{EC}=\frac{3}{4}$, $\frac{AF}{FC}=\frac{1}{3}$, получите самостоятельно $\frac{AO}{OE}=\frac{7}{9}$, $\frac{BO}{OF}=\frac{3}{1}$.

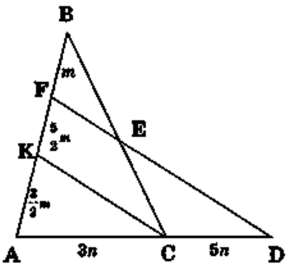
Модель 2. Рассмотрим треугольник ABC и прямую, пересекающую две его стороны (пусть это будут AB и BC) и продолжение третьей соответственно в точках F, E и D. Этими точками создаются *три пропорции* $\frac{AF}{FB}$, $\frac{BE}{EC}$ и $\frac{AC}{CD}$, *знание любых двух из которых всегда однозначно определяет третью.*



Так же, как и в модели 1, эта задача решается с помощью определённого дополнительного построения. Каким будет это построение — решающий должен выбрать сам. Вариантов у него, как правило, несколько — есть более удачные, есть менее.

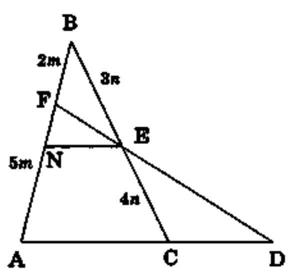
Например, несложно догадаться, что соединив точки B и D, мы сразу же переводим нашу задачу в одну из четырёх из модели 1. А можно и независимо от этого создать такую геометрическую конструкцию, которая позволила бы с помощью теоремы Фалеса и свойств подобных треугольников перенести информацию об отношениях отрезков с одной прямой на другую (или с двух различных прямых на третью) и, после определенной обработки этой информации, получить искомую пропорцию, возможно ещё раз прибегнув к помощи свойств подобия и теоремы Фалеса. Отметим, что именно этот прием отрабатывался нами и при решении примеров 1 – 4 модели 1. Продолжим эту работу.

Пример 5. Пусть в условии модели 2 заданы отношения $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{4}{1}$ и $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{3}{5}$. Для определения $\dfrac{BE}{EC}$ достаточно провести прямую $CK \parallel FD$ до пересечения с AB в точке K.



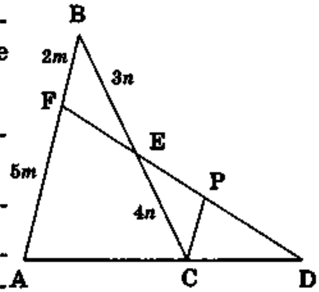
Тогда по теореме Фалеса $AK : KF = 3 : 5$. Обозначив $AF = 4m$, $BF = m$, получим сразу же $AK = \dfrac{3}{2}m$, $KF = \dfrac{5}{2}m$. Снова используя теорему Фалеса, имеем $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BF}{KF} = \dfrac{m}{5m/2} = \dfrac{2}{5}$.

Пример 6. Зададим теперь отношения $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{5}{2}$ и $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{3}{4}$ и определим $\dfrac{AC}{CD}$, сделав для сравнения два различных дополнительных построения.



1) Обозначим $BF = 2m$, тогда $AF = 5m$, $AB = 7m$. Проведем $EN \parallel AC$ до пересечения с AB в точке N. Тогда по теореме Фалеса $BN : NA = 3 : 4$. Следовательно, $BN = 3m$, $AN = 4m$, $NF = BF - BF = m$. Из подобия треугольников BEN и BCA $\left(k=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{3}{7}\right)$ следует

$AC=\frac{7}{3}NE$, из подобия треугольников FEN и FDA $\left(k=\frac{FN}{FA}=\frac{1}{5}\right)$ следует $AD=5\cdot NE$. Поэтому $CD=\frac{8}{3}NE$, $AC : CD = 7 : 8$.



2) При проведении $CP \parallel AB$ до пересечения с ED в точке P образуются подобные по двум углам треугольники BEF и CEP $\left(k=\frac{BE}{EC}=\frac{3}{4}\right)$. Тогда, используя те же обозначения, получим $CP=\frac{8m}{3}$. Но треугольники CPD и AFD при таком дополнительном построении также оказываются подобными с коэффициентом $k=\frac{CP}{AF}=\frac{8}{15}$, а потому $CD : AD = 8 : 15$ и $AC : CD = 7 : 8$.

Пример 7. Задав $\frac{BE}{EC}=\frac{3}{2}$, $\frac{AC}{CD}=\frac{3}{1}$, получите самостоятельно $\frac{AF}{FB}=\frac{8}{3}$.

Итак, разобраны все возможные случаи определения пропорций в этих двух модельных задачах. Мы сознательно рассматривали их решение достаточно подробно, т. к. решение подобного рода задач требует выработки у учащегося определённых и очень полезных с точки зрения будущего геометрических навыков.

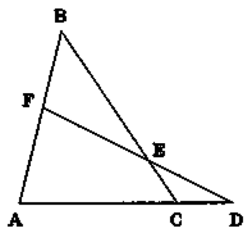
В первую очередь речь идет об умении делать удачные дополнительные построения. Дело в том, что половина, если не больше, задач планиметрии подразумевает их проведение в процессе решения. Понятно, что совершенно не обязательно всегда ассоциировать эту процедуру с параллельными прямыми. Иногда в задаче даже соединение двух различных точек отрезком уже даёт определённый «импульс» к решению, ибо приводит к образованию нового геометрического объекта со своими свойствами и геометрическими связями. А уж если нам удаётся «обнаружить» неявно заданную в условии окружность, то мы обычно с радостью убеждаемся в том, что наша задача приобрела совершенно новое качество. Ведь окружность содержит в себе столько геометрического потенциала, что задачу после этого порой бывает сложнее не решить, чем решить.

Однако, к сожалению, в экзаменационных работах мы часто встречаемся с обратной ситуацией, когда решающий проводит огромное количество ненужных, не заданных в условии линий и сам достаточно быстро «вязнет» в созданной собственными руками «геометрической паутине». Поэтому ещё раз повторим — важно, очень важно развивать в себе навыки геометрической эрудиции. А это, как мы уже не раз повторяли, даётся только с решением достаточно большого количества геометрических головоломок.

И ещё одно замечание. Иногда в школах с углублённым изучением математики, а также в некоторых учебных пособиях предлагается следующий способ решения рассмотренных нами модельных задач. Сначала формулируется и доказывается одна базовая теорема.

Теорема Менелая. Для геометрической конфигурации, изображённой в модели 2, *верно следующее равенство*:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CD}{DA}=1. \qquad (2)$$



Далее задача решающего состоит только в том, чтобы «увидеть» знакомую «картинку» — треугольник, пересечённый прямой, — и вспомнить алгебраическое соотношение (2), произнеся три раза мнемоническое «заклинание»: «от вершины до точки пересечения, от точки пересечения до вершины».

У такого подхода есть свои плюсы и свои минусы.

Плюс в том, что, повторяя неоднократно одно и то же действие, учащиеся перестают «бояться» таких конструкций и сразу же ищут возможность применить приведённую теорему. Запишите, например, в примере 1 для ΔAEC, пресечённого прямой FB, соотношение $\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AO}{OE}\cdot\frac{EB}{BC}=1$. Подставив заданные в условии числовые отношения, получим $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{EB}{BC}=1$, $BE=\frac{2}{5}BC\Rightarrow EC=\frac{3}{5}BC$, а значит,

$\frac{BE}{EC}=\frac{2}{3}$. Результат получен без применения каких-либо дополнительных действий. Просто одна формула — и всё!

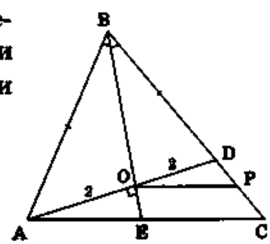
Но есть и минусы. Во-первых, эта теорема в программу школьного курса геометрии не включена, а значит, её использование требует, вообще говоря, приведения в экзаменационной работе доказательства. Само же доказательство теоремы Менелая представляет из себя задачу, решаемую методами, отработанными нами в моделях 1 и 2. Надо сделать дополнительное построение $CP \parallel AB$ и получить искомое соотношение, используя свойства подобия двух пар треугольников $\Delta BEF \sim \Delta CEP$ и $\Delta CPD \sim \Delta AFD$ (пожалуйста, завершите это доказательство самостоятельно, используя рисунок из второй части решения примера 6).

Во-вторых, и это важнее, возможность использования алгебраических формул при решении планиметрических задач зачастую препятствует развитию геометрической изобретательности, способности геометрического видения задачи, геометрической эрудиции. По нашему мнению, теорема Менелая очень удобна для быстрой проверки правильности проделанных расчетов (в этом смысле полезно все семь приведённых выше примеров проверить с помощью этой теоремы) и интересна как самостоятельная задача, вселяющая уверенность в неотвратимости получения результата. Однако, безусловно, перспективнее сначала научиться делать в процессе решения правильные дополнительные построения.

Формирование способности узнавать ключевые задачи на перенос пропорций в реальных геометрических ситуациях — одна из важнейших целей этого параграфа.

Задача 6 (*МГУ, географ. ф-т, 1992*). В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC.

Решение. 1) Обозначим через O точку пересечения AD и BE. Тогда BO — биссектриса и высота в $\Delta ABD \Rightarrow \Delta ABD$ — равнобедренный, и $AO = OD = 2$.



2) $BO : OE = 3 : 1$ (для определения этой пропорции достаточно провести $OP \parallel AC$, тогда $DP = PC = \frac{BD}{2}) \Rightarrow BO = 3$, $OE = 1$.

3) По теореме Пифагора из ΔABO: $AB=\sqrt{13} \Rightarrow BC=2\sqrt{13}$; из ΔAOE: $AE=\sqrt{5} \Rightarrow AC=3\sqrt{5}$ (т.к. BE — биссектриса, то $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$).

Ответ: $\sqrt{13}; 2\sqrt{13}; 3\sqrt{5}$.

Задача 7 (*МГУ, биолог. ф-т, 1982*). Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR : RC = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырёхугольника $PQST$ к площади треугольника ABC, где S и T — точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

Решение. 1) Обозначим $S_{ABC} = S$, тогда $S_{BRC} = \frac{2S}{3}$ (треугольники с общей вершиной B, длины оснований которых относятся как $2 : 3$, см. рис. 1).

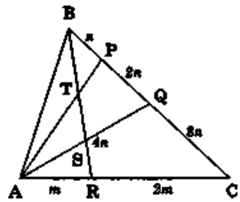


Рис. 1.

2) $S_{PQST} = S_{BSQ} - S_{BPT}$, при этом треугольники BSQ и BPT имеют с ΔBRC общий угол, а значит, их площади можно выразить через площадь ΔBRC. Для этого необходимо лишь понять, в каком отношении отрезок BR делится точками T и S.

3) $\frac{BT}{TR}=\frac{3}{5}$ (следует из решения задачи о

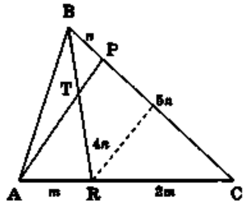


Рис. 2.

переносе пропорций в ΔABC, где $BP : PC = 1 : 5$, $AR : RC = 1 : 2$, обоснуйте самостоятельно, см. рис. 2).

4) $\frac{BS}{SR}=\frac{3}{1}$ (следует из решения аналогичной задачи).

5) $BT : TS : SR = 3 : 3 : 2$ (это результат пересчета всех отрезков в одних единицах измерения: обозначим (рис. 3) $BT = 3x$, $TR = 5x$, $SR = y$, $BS = 3y$, тогда $BR = 8x = 4y \Rightarrow y = 2x$).

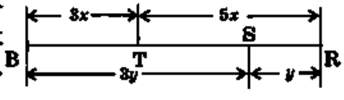
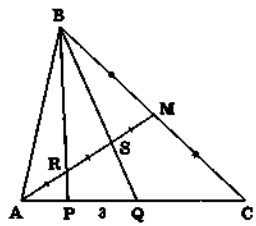


Рис. 3.

6) $\frac{S_{BSQ}}{S_{BRC}} = \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{BS}{BR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{8}$; $\frac{S_{BPT}}{S_{BRC}} = \frac{BP}{BC} \cdot \frac{BT}{BR} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$; $S_{PQST} =$ $S_{BSQ} - S_{BPT} = \frac{5}{16} S_{BRC} = \frac{5}{16} \cdot \frac{2}{3} S = \frac{5}{24} S.$ **Ответ:** $\frac{5}{24}$.

Заметим, что у этой задачи возможно другое решение, если искомую площадь рассматривать как часть площади треугольника APQ. Проведите его самостоятельно — это очень полезно!

Задача 8 (*МГУ, эконом. ф-т, 1965*). В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найти AC.



Решение. Обозначим точки пересечения отрезков AM с BP через R, AM с BQ — через S.

1) S — точка пересечения медиан ΔABC (следует из единственности этой точки в треугольнике: AM — медиана, $AS : SM = 2 : 1$) $\Rightarrow AQ = QC$, $BS : SQ = 2 : 1$.

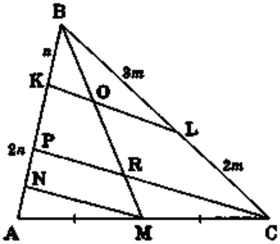
2) $AR : RS = 1 : 1$, $BS : SQ = 2 : 1 \Rightarrow$ $AP : PQ = 2 : 3$ (обоснуйте самостоятельно) $\Rightarrow AP = 2$, $AQ = 5$, $AC = 10$. **Ответ: 10.**

И у этой задачи возможен другой вариант решения, если в пункте 2 найти отношение $AP : PC$.

В заключение посмотрим, как умение переносить пропорции может быть реализовано в конфигурации, фактически состоящей из двух смежных треугольников.

Задача 9 (*Курский госуд. технич. ун-т, 1996*). На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки K, L и M соответственно, причём $KB = \frac{1}{3} AB$, $BL = \frac{3}{5} BC$, $AM = MC$. Отрезки KL и BM пересекаются в точке O. Найти отношение $BO : OM$.

Решение: Попробуем перенести информацию об отношениях частей отрезков BC и AC треугольника ABC на сторону AB. Для этого из точек C и M проведем прямые, параллельные KL до пересечения с AB в точках P и N соответственно (обозначим при этом



точку пересечения CP с BM через R). Это удобно, так как если нам удастся найти отношение $BK : KP : PN : NA$ (а для этого мы все эти отрезки должны будем выразить в одних единицах измерения), то по теореме Фалеса мы сразу сможем определить пропорцию $BO : OR : RM$, а значит, и искомое $BO : OM$.

1) $BL : BC = 3 : 5 \Rightarrow BL : LC = BK : KP = 3 : 2$. Поэтому если обозначить $BK = n$, то $KP=\frac{2}{3}n$.

2) $AM = MC \Rightarrow AN = NP$.

3) $AP = 2n - \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}n$, тогда $AN = PN = \frac{2}{3}n$.

В итоге $BO : OR : RM = BK : KP : PN = 3 : 2 : 2$, следовательно, $BO : OM = 3 : 4$. **Ответ:** $3 : 4$.

Честно говоря, и в этой задаче возможны другие дополнительные построения и даже не один вариант решения. Подумайте над этим и попытайтесь предложить какой-нибудь свой.

Заканчивая этим параграфом первую главу пособия, отметим, что в ней изучен объём геометрической информации, достаточный для успешного решения очень большого количества задач планиметрии. В главах 2 и 3 мы остановимся лишь на особенностях, которые вносят в процесс решения другие геометрические объекты — четырёхугольники, многоугольники и окружности. А в последующих главах рассмотрим различные методы решения планиметрических задач, проиллюстрировав их применение большим количеством примеров.

Задачи для самостоятельного решения

1. Точка N лежит на стороне AC треугольника ABC, причём $AN : AC=n$. Найти, в каком отношении медиана AM делит отрезок BN.

2. В треугольнике ABC с площадью, равной 1, точка P принадлежит стороне BC так, что $BP : BC = 3:5$, точка O принадлежит отрезку AP так, что $AO : OP = 4:3$. Найти площадь треугольника AOM, где M — точка пересечения BO с AC.

3. В треугольнике ABC через точку M, лежащую на стороне BC, проведены прямые, параллельные сторонам AC и AB. Площадь образовавшегося параллелограмма составляет $5/18$ площади треугольника ABC. Найти $BM : MC$.

4 *(МГУ, эконом. ф-т, 1987)*. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $AK : KB = 2 : 3$ и $AM : MC = 4 : 5$. Найти отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM.

5 *(МГУ, ф-т почвовед., 1976)*. В прямоугольном треугольнике меньший угол равен α. Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части. Определить, в каком отношении эта прямая делит гипотенузу.

6 *(МГУ, географ. ф-т, 1982)*. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения BD с CE до стороны AC равно 1. Найти длину стороны AB.

7. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что прямая DE параллельна стороне AC. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O, отрезки BO и DE – в точке F, при этом $DO : OC = 1:2$. Определить площадь треугольника BEF, если площадь DFO равна 1.

8. Точки M, N и P принадлежат соответствующим сторонам AB, BC и AC треугольника ABC так, что $AM : AB = BN : BC = CP : CA = 1 : 3$. Прямые CM, AN и BP, пересекаясь, ограничивают треугольник площадью S. Найти площадь треугольника ABC.

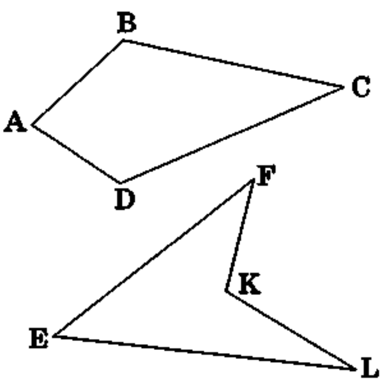
9. В треугольнике ASD на стороне AS взята точка B, на стороне AD — точка P, причем $PD = 2AP$. Прямые SP и BD пересекаются в точке N так, что $4SN = 3SP$. Из точки B параллельно стороне AD проведена прямая, пересекающая SD в точке C. Найти :а) $SC:CD$; б) площадь треугольника SNK, где K — точка пересечения прямых AC и BD, если площадь четырёхугольника $ABCD$ равна 5.

10. В треугольнике ABC, площадь которого равна 1, на стороне BC взяты точки E и F, делящие её на три равные части, а на стороне AC взяты точки P и Q, также делящие эту сторону на три равные части. Найти площадь четырёхугольника, образованного при пересечении прямых BP, BQ, AE и AF.

ГЛАВА 2. ВЫПУКЛЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

В этой главе мы подробно рассмотрим ключевые геометрические факты, касающиеся такого распространенного в планиметрии объекта, как четырёхугольник.

Встретив в условии задачи словосочетание «выпуклый четырёхугольник», учащийся либо вообще игнорирует слово «выпуклый», либо от неожиданности останавливается и не может даже начать процесс решения, тщетно пытаясь обнаружить какой-то подвох. Поэтому начнём с определения понятия «выпуклости» фигуры. Ничего особо сложного в этом понятии нет.



Фигура называется *выпуклой*, если отрезок, соединяющий любые две её точки, не пересекает границ этой фигуры. Можно дать и другое определение: *многоугольник* называется *выпуклым*, если он целиком расположен по одну сторону от каждой из прямых, содержащих его стороны. Так, представленный на рисунке четырёхугольник *ABCD* — выпуклый, а *EFKL* таковым не является. Для того, чтобы понять это, годится любое из двух данных выше определений — обязательно разберитесь в этом самостоятельно.

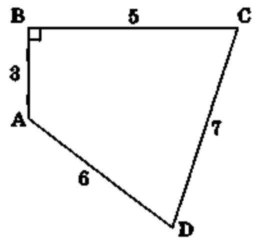
Если соединить отрезком две противоположные вершины выпуклого четырёхугольника, образуется два треугольника с одним общим элементом — диагональю четырёхугольника. Первые выводы относительно разрешимости задачи на определение различных элементов четырёхугольника в зависимости от количества его элементов, заданных в условии, следуют как раз из этого разбиения.

§ 2.1. РАСЧЁТ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКОВ

Итак, сколькими независимыми элементами определяется выпуклый четырёхугольник?

Если говорить о произвольном четырёхугольнике, то их — пять, так как каждый из входящих в него двух треугольников определяется, вообще говоря, тремя независимыми элементами (конечно, с определёнными оговорками, сделанными нами ранее в § 1.1), а один элемент — диагональ четырёхугольника — у них общий. Приведем пример.

Задача 1. В четырёхугольнике $ABCD$ угол ABC прямой, $AB = 3$, $BC = 5$, $AD = 6$, $DC = 7$. Найти косинус угла ADC.



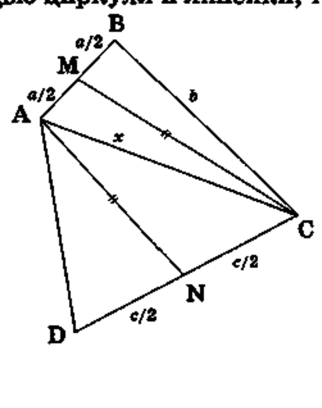
Решение. Диагональ AC разбивает $ABCD$ на два треугольника — прямоугольный ΔABC, из которого по теореме Пифагора сразу следует $AC^2 = 34$, и ΔACD, в котором теперь уже определены три стороны, поэтому косинус искомого угла легко определяется по одноимённой теореме: $34 = 6^2 + 7^2 - 2\cdot 6\cdot 7\cdot\cos\angle ADC$.

Откуда $\cos\angle ADC = \dfrac{17}{28}$.

Ответ: $\dfrac{17}{28}$.

На практике задачи на расчёт четырёхугольников обычно намного сложнее.

Решая, например, задачу 3 из §1.4, мы даже не обратили внимание на то, что четырёхугольников с заданными в условии параметрами очень много. Действительно, если начать строить данную фигуру с помощью циркуля и линейки, то, выбрав для опре-

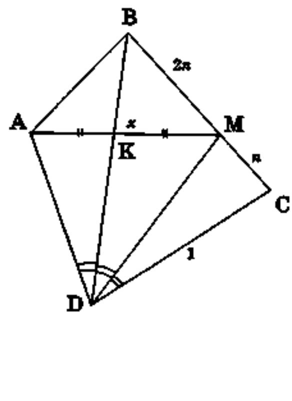


делённости некоторое значение длины $AC = x$, мы по трём элементам — a, b и x — сначала зафиксируем треугольник ABC, а значит, и его медиану CM. А затем, с известными сторонами AC, $AN = CM$ и $CN = c/2$ построим ΔACN, достроив его потом до ΔACD. Понятно, что выбрав другое AC, мы получим другой четырёхугольник $ABCD$, все стороны которого будут теми же самыми (следует из решения).

Ничего удивительного в этом нет. Ведь по условию в четырёхугольнике заданы всего лишь четыре элемента, и для его фиксации на плоскости необходим ещё один элемент. Однако в процессе решения оказалось, что для определения четвёртой стороны без этого вполне можно обойтись. Хотя понятно, что, например, диагональ четырёхугольника мы найти не сможем.

Количество определяющих четырёхугольник независимых элементов, действительно, часто практического значения не имеет. Если что-то требуется найти в произвольном четырёхугольнике, то, как правило, это делается из решения треугольников, его составляющих; при этом внешняя структура объекта остаётся как бы «за скобками». Наличие же у этих треугольников общих элементов является хорошим связующим условием и в решении, безусловно, учитывается в первую очередь.

Задача 2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ на стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$, отрезки BD и MD делят угол ADC на три равные части, при этом отрезок AM, пересекаясь с BD в точке K, делится пополам. Найти длину диагонали AC, если $CD = 1$ и $\cos C = 1/4$.



Решение. 1) В ΔAMD: DK — биссектриса и медиана (по условию), а значит, и высота, т.е. $DK \perp AM$.

2) В ΔABM: BK — высота и медиана, а значит ΔABM — равнобедренный, $AB = BM$ и BK — биссектриса угла B.

3) В ΔBCD: DM — биссектриса $\angle BDC \Rightarrow BD : DC = BM : MC = 2 : 1 \Rightarrow BD = 2$.

Теперь по теореме косинусов: $BC^2+1^2-2\cdot BC\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=2^2 \Rightarrow BC=2$ (второй корень уравнения — отрицательный) $\Rightarrow$ $BM=AB=4/3$.

4) $\frac{DC}{\sin\angle DBC}=\frac{BD}{\sin C}$ (теорема синусов), где $\sin C=\frac{\sqrt{15}}{4}$ (следует из основного тригонометрического тождества и условия $\sin C\geq 0$) $\Rightarrow$ $\sin\angle DBC=\sqrt{15}/8$.

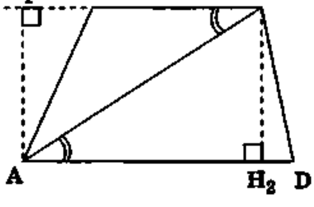
5) В ΔABC: $AC^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2+2^2-2\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\cdot\cos B$ (теорема косинусов), где $\cos B=1-2\sin^2\angle DBC=\frac{17}{32}$ (косинус двойного угла) $\Rightarrow AC^2=\frac{53}{18}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{53}{18}}$.

Решение этой более сложной задачи ещё раз показывает, что расчёт четырёхугольников — это, как правило, «движение по треугольникам», на которые этот четырёхугольник разбивается в процессе решения, без специального исследования числа элементов, этот четырёхугольник определяющих.

Однако в планиметрии существуют две категории четырехугольников, главное отличительное свойство которых — наличие параллельных сторон. Это трапеции (одна пара параллельных сторон) и параллелограммы (две пары параллельных сторон). Естественно, такая особенность отражается на многих свойствах этих геометрических объектов (в последующих двух параграфах мы их подробно исследуем), и, в первую очередь, на количестве независимых элементов, полностью определяющих каждый из этих объектов.

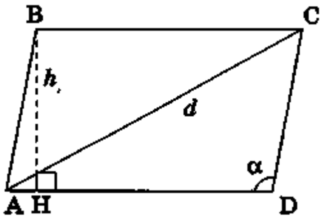
Так, на трапецию $ABCD$ можно посмотреть как на геометрический объект, состоящий из двух треугольников с двумя одинаковыми элементами:



а) общей стороной AC и равными высотами $AH_1=CH_2$, либо

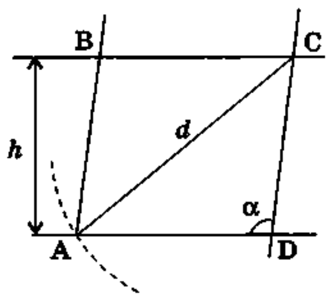
б) общей стороной AC и равными прилежащими к ней углами BCA и CAD.

А это значит, что произвольная трапеция должна полностью определяться только четырьмя независимыми элементами.



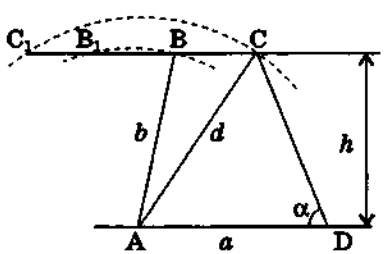
Параллелограмм же состоит вообще из двух равных треугольников, а потому и определяется он, как треугольник, — тремя элементами.

Действительно, зададим три элемента, например диагональ $AC = d$ параллелограмма $ABCD$, его высоту $BH = h$ и один из углов между сторонами, например $\angle ADC = \alpha$, и попробуем построить $ABCD$ с помощью циркуля и линейки.

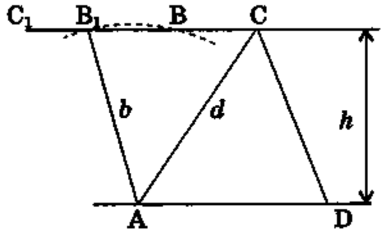


Это сделать совершенно несложно. Из любой точки прямой AD восстановим к ней перпендикуляр длины h, а через его вершину проведем прямую, параллельную AD. После этого из произвольной точки D прямой AD отложим угол α, одна из сторон которого лежит на AD, а вторая пересекает построенную ранее параллельную AD прямую в точке C. Проведя окружность с центром в точке C и радиусом d, фиксируем вершину A как результат пересечения этой окружности с прямой AD. Если затем из A провести прямую, параллельную CD до пересечения с прямой, параллельной AD, получим четвертую вершину B параллелограмма.

Точно так же, задав четыре элемента в трапеции $ABCD$, например, длину основания a, длины диагонали d и боковой стороны b ($d > b$), исходящих из одной вершины заданного основания, и высоту h, можно в качестве иллюстрации сформулированной выше закономерности построить эту трапецию циркулем и линейкой.



Кстати, таких трапеций будет две, но у каждой из них остальные параметры определяются однозначно.



Чтобы выполнить это построение, сначала, как и в предыдущем случае, через вершину перпендикуляра длины h, восстановленного из произвольной точки отрезка $AD = a$, проведём прямую, параллельную AD. Затем построим две окружности с центром в точке A радиусами b и d. Каждая из этих окружностей пересекают прямую, параллельную AD, в двух точках — соответственно B, B_1 и C, C_1. Однако, учитывая, что точка C должна находиться правее точки B (следует из выпуклости трапеции, т.к. D взята правее A), возможны только две геометрические фигуры, обладающие заданными параметрами $ABCD$ и AB_1CD. Они при этом фиксированы на плоскости, а это значит, что все их элементы можно определить как графически, так и аналитически, зная a, b, d и h.

Сформулируем важный вывод:

1. *Зная любые три независимые элемента в параллелограмме, всегда можно найти все остальные его элементы;*

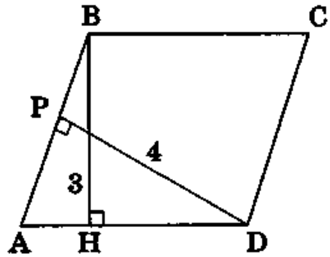
2. *Зная любые четыре независимые элемента трапеции, также всегда можно определить все остальные её элементы.*

Как и для треугольников, этот геометрический факт мы рекомендуем зафиксировать в сознании. Его, как правило, редко формулируют. И даже те, кто формулирует, — никогда не доказывают. Однако он имеет ключевое значение, так как формирует у учащегося уверенность в разрешимости задачи на расчет параллелограммов и трапеций при заданном, необходимом для этой фигуры количестве определяющих элементов.

Само же решение такой задачи, как мы скоро убедимся, практически ничем не отличается от методики решения задач на расчёт треугольников, так как использует (что естественно) те же базовые теоремы. Наличие у треугольников, на которые распадается трапеция или параллелограмм, общих элементов (сторон, высот, углов) при этом является хорошим связующим условием и может быть использовано в качестве дополнительных замыкающих соотношений.

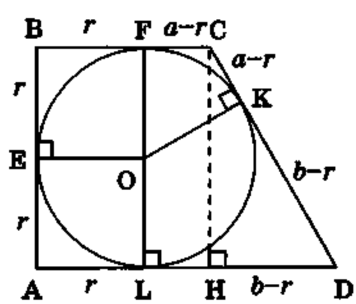
Разберём несколько задач для иллюстрации приведённых закономерностей.

Задача 3. Найти синус острого угла параллелограмма, если длины его высот равны 3 и 4, а периметр равен 28.



Решение. В параллелограмме $ABCD$ заданы три элемента. Обозначим через $x = AD$ и $y = AB$ его стороны, соответствующие высотам $BH = 3$ и $DP = 4$. Тогда из условия следует: $2x + 2y = 28$. Второе замыкающее соотношение можно получить, записав площадь параллелограмма S (произведение основания на высоту) двумя способами: $S = 3x = 4y$. Решив эту простую систему уравнений, находим стороны параллелограмма $x = 8$, $y = 6$. Синус острого угла параллелограмма легко получить из соотношений в прямоугольном треугольнике: либо в ΔABH: $\sin\alpha = \frac{3}{y} = \frac{1}{2}$; либо в ΔAPD: $\sin\alpha = \frac{4}{x} = \frac{1}{2}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

Задача 4. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если основания трапеции равны a и b.



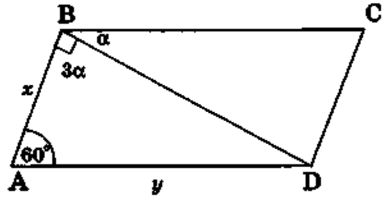
Решение. В трапеции $ABCD$ заданы четыре элемента: 1) $BC = a$; 2) $AD = b$; 3) $\angle A = 90°$; 4) условие — «трапеция описана около окружности».

Представим последнее условие в математической форме. Для этого опустим из центра O окружности перпендикуляры на стороны трапеции, получим E, F, K, L — точки касания окружности с трапецией. Но тогда $AEOL$ и $BFOE$ — квадраты со стороной, равной радиусу вписанной окружности (обозначим его через r), $CK = CF = a - r$, $DK = DL = b - r$ (следует из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки).

Далее опустим из вершины C высоту CH. В прямоугольном ΔCHD: $CH = AB = 2r$, $DH = b-a$, $CD = a+b-2r$. Замыкающим соотношением будет теорема Пифагора: $(2r)^2+(b-a)^2=(a+b-2r)^2$, откуда после раскрытия скобок и приведения подобных следует $r=\dfrac{ab}{a+b}$.

Ответ: $\dfrac{ab}{a+b}$.

Задача 5. Периметр параллелограмма равен 90, острый угол — 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол в отношении 1 : 3. Найти стороны параллелограмма.



Решение. В параллелограмме $ABCD$ заданы три элемента, третий — в виде отношения углов 1 : 3. Обозначим $\angle A=60°$, тогда $\angle B=120°$. Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол и $\angle ADB=\angle DBC$ (внутренние накрест лежащие), то если принять для определенности, что $AD > AB$, получим $\angle ABD=3\angle DBC=\dfrac{3}{4}\angle B=90^0$ (заметим, что если бы мы посчитали, что $AD < AB$, то получилось бы $\angle ABD=\dfrac{1}{3}\angle DBC=\dfrac{1}{4}\angle B=30^0$, а значит, $\angle ADB=\angle CBD=90^0$ — вершины B и D как бы поменялись местами). Обозначим для удобства $AB = x$, $AD = y$. Тогда из соотношений в прямоугольном треугольнике $\dfrac{x}{y}=\cos 60^0$, или $y = 2x$. Кроме того, по условию $2(x+y) = 90$. Откуда легко получаем $x = 15$, $y = 30$.

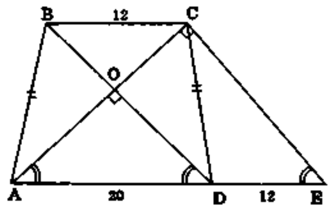
Ответ: 15; 30.

Задача 6. Найти площадь равнобедренной трапеции, у которой основания имеют длины 12 и 20, а диагонали взаимно перпендикулярны.

В трапеции заданы четыре элемента-условия (перечислите их самостоятельно). Приведём два различных решения этой задачи.

Пусть это трапеция $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей.

Решение 1. 1) $BD = AC$ (т.к. $\Delta ABD=\Delta ACD$ по двум сторонам и углу между ними).



2) $BO:OD=CO:AO=12:20=3:5$. Обозначим $BO=OC=3x$, тогда $AO=OD=5x$.

3) $(5x)^2+(5x)^2=20^2$ (т. Пифагора в ΔAOD). Откуда $x^2=8$.

4) $S_{AOD}=\dfrac{25x^2}{2}=100$, $S_{BOC}=\dfrac{9x^2}{2}=36$, $S_{AOB}=S_{COD}=\dfrac{15x^2}{2}=60$.

5) В итоге $S_{ABCD}=100+36+2\cdot 60=256$.

В пункте 1) этого решения было доказано известное утверждение: *в равнобедренной трапеции диагонали равны*. Попробуйте доказать самостоятельно обратное утверждение: *если в трапеции диагонали равны, то она равнобедренная*. Если это покажется сложным, в качестве наводящего соображения используйте прием, предложенный в решении 2 этой задачи.

Решение 2. Сделаем одно достаточно распространенное в задачах на трапецию дополнительное построение: из вершины C проведем прямую $CE \parallel BD$ до пересечения с AD в точке E. Удобство этого построения заключается в том, что площадь трапеции $ABCD$ становится равной площади вновь образованного треугольника ACE.

Это легко следует из равенства площадей треугольников ABC и CDE (у них равны высоты и основания — покажите самостоятельно).

Решение нашей задачи с таким построением выглядит намного проще. ΔACE — равнобедренный ($AC=BD=CE$) и прямоугольный ($CE \parallel BD \perp AC$) $\Rightarrow 2\cdot AC^2=32^2$ (теорема Пифагора) и $S_{ACE}=\dfrac{AC^2}{2}=256$.

Ответ: 256.

В этой главе будет ещё много задач на параллелограммы и трапеции. Прежде чем начинать решение каждой из них, старайтесь везде, где это возможно, сначала ответить на вопрос: принципиально имеет ли эта задача решение, достаточно ли для этого заданных в условии элементов, можно ли построить заданную фигуру циркулем и линейкой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить с помощью циркуля и линейки:

а) параллелограмм — по стороне и двум диагоналям;

б) трапецию — по четырем сторонам;

в) выпуклый четырехугольник — по четырем сторонам a, b, c, d и отрезку m, соединяющему вершину с серединой одной из противоположных сторон.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $BC = AD = 2$, $\angle BCD = 30^\circ$, $\sin\angle BDC = \frac{1}{\sqrt{5}}$, угол BAD — прямой. Найти AB.

3. Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до его неравных сторон равны соответственно 2 и 3, а острый угол равен 60°. Найти площадь параллелограмма.

4 *(МГУ, эконом. ф-т, 1999)*. В параллелограмме $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагональ $BD = a$, O — точка пересечения диагоналей. Найти площадь параллелограмма, если $DBA = 45^\circ$, $AOB = 105^\circ$.

5 *(МТУСИ, 1996)*. Найти площадь прямоугольной трапеции с основаниями 8 и 18, если её диагонали взаимно перпендикулярны.

6 *(МГУ, географ. ф-т, 1984)*. В ромбе $ABCD$ со стороной, равной 6 и углом BAD, равным $\frac{\pi}{3}$, на стороне BC взята точка E на расстоянии, равном 2 от точки C. Найти расстояние от точки E до центра ромба.

7 *(МГУ, физич. ф-т, 2000)*. В параллелограмме $KLMN$ биссектриса $\angle MNK$ пересекает сторону KL в точке Q такой, что $LQ/QK = 1/3$, $\angle LNQ = \alpha$. Найти $\angle LNK$.

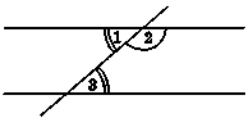
8 *(МГУ, геолог. ф-т, 1998)*. Четырёхугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найти площадь четырехугольника $PQRS$.

9 *(МГУ, ф-т психолог., 1987)*. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD, AOD равны соответственно 20 кв.м, 40 кв.м, 60 кв.м. Найти угол BAO, если известно, что $AB = 15$ м, $AO = 8$ м, а угол BOA больше 31°.

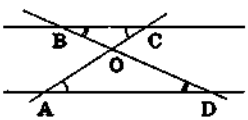
10 *(МГУ, эконом. ф-т, 1995)*. В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos(\angle KLM) = -\frac{1}{3}$. Найти диагональ LN.

§ 2.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ СТОРОН ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЁ

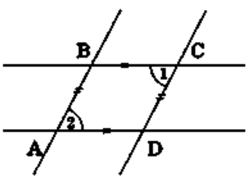
Какие свойства приобретает четырехугольник, когда у него появляется хотя бы одна пара параллельных сторон? Для ответа на этот вопрос напомним несколько хорошо известных геометрических конфигураций, содержащих параллельные прямые.



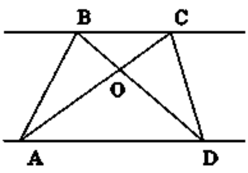
1) $\angle 1 = \angle 3$ **(внутренние накрест лежащие),** $\angle 2 + \angle 3 = 180^0$**. Наличие в задаче параллельных прямых помогает переносить информацию о величинах углов по расчетной плоскости.**



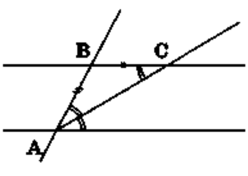
2) $\Delta AOD \sim \Delta BOC$**. Параллельность прямых практически всегда приводит к образованию подобных треугольников — надо только научиться их замечать.**



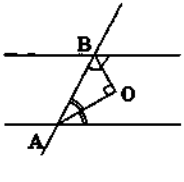
3) $AB = CD, BC = AD,\quad \angle 1 = \angle 2$**. Наличие в задаче двух пар параллельных прямых также помогает переносить по расчётной плоскости информацию о длинах отрезков и величинах углов.**



4) $S_{BAD} = S_{CAD},\quad S_{ABC} = S_{DBC},\quad S_{OAB} = S_{OCD}$, $S_{BAD} : S_{DBC} = AD : BC$**. Параллельные прямые дают возможность сравнивать площади треугольников в случае, когда их основания лежат на этих прямых.**



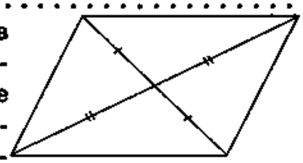
5) AC **— биссектриса** $\angle A \Rightarrow AB = BC$**. При пересечении биссектрисой угла прямой, параллельной одной из сторон этого угла, происходит «рождение» равнобедренного треугольника.**



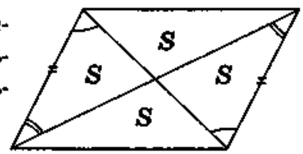
6) AO **— биссектриса** $\angle A$, BO **— биссектриса** $\angle B \Rightarrow \angle AOB = 90^0$**. При пересечении биссектрис внутренних односторонних углов при параллельных прямых происходит «рождение» прямоугольного треугольника.**

Зафиксируем теперь некоторые, наиболее часто используемые свойства параллелограммов и трапеций, непосредственно следующие из приведённых фактов:

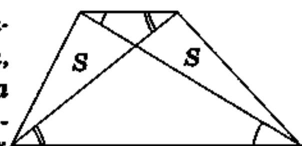
а) *признаки параллелограмма*, в особенности третий (традиционно забываемый): если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.



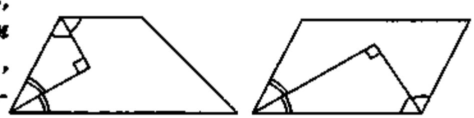
б) *диагонали параллелограмма делят его на две пары равных треугольников, площади всех этих треугольников равны между собой.*



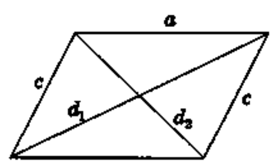
в) *диагонали трапеции, пересекаясь, образуют четыре треугольника, два из которых равновелики, а два других — подобны*, коэффициент подобия равен отношению оснований трапеции.



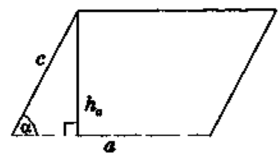
г) *биссектрисы углов, прилежащих к боковым сторонам трапеции, перпендикулярны;* аналогично *перпендикулярны биссектрисы углов, прилежащих к любой из сторон параллелограмма.*



д) *в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон:* $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + c^2)$, где d_1, d_2 — диагонали параллелограмма.

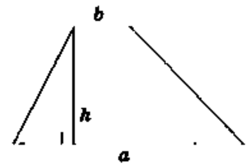


Дополним эти свойства результатами, следующими из разбиения четырёхугольника одной из его диагоналей на два треугольника:

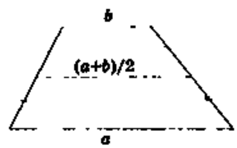


е) *площадь параллелограмма равна* удвоенной площади одного из равных треугольников, на которые делит параллелограмм его диагональ: $S = ac\sin\alpha = ah_a$ где a и c — длины сторон параллелограмма, α

α — угол между ними, h_a — высота параллелограмма, проведённая к стороне a.



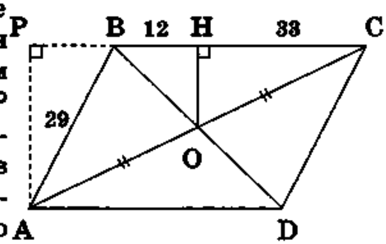
ж) *площадь трапеции* равна $S = \dfrac{a+b}{2}h$, где a и b — длины оснований трапеции, h — её высота.



з) *средняя линия трапеции параллельна основаниям и её длина равна полусумме длин оснований трапеции.*

Использование этих свойств — составная часть решения любой планиметрической задачи с участием параллелограммов и трапеций. Покажем это.

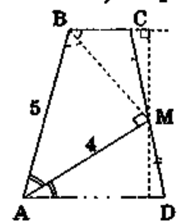
Задача 1. Перпендикуляр, опущенный из точки O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ на сторону BC, делит её на отрезки $BH = 12$ и $HC = 33$. Определить площадь параллелограмма, сторона AB которого равна 29.



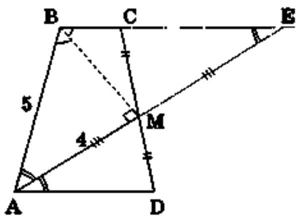
Решение. В параллелограмме заданы ровно три элемента. Для определения его площади опустим из вершины A перпендикуляр AP на прямую BC. AP является высотой параллелограмма. Вычислив ее длину, мы сразу же найдем искомую площадь. Заметим, что $AP \parallel OH$ (как два перпендикуляра к одной прямой), $AO = OC$ (по свойству диагоналей параллелограмма), следовательно $PH = HC = 33$ (по теореме Фалеса). А это значит, что точка P лежит на продолжении стороны BC за точку B, $PB = 33 - 12 = 21$. Тогда, по теореме Пифагора в прямоугольном ΔAPB: $AP^2 = 29^2 - 21^2 = 400$. В итоге $AP = 20$, $S = 20\cdot(12+33) = 900$. **Ответ: 900.**

Задача 2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) биссектриса угла BAD проходит через точку M, которая является серединой стороны CD. Известно, что $AB = 5$, $AM = 4$. Найти длину отрезка BM.

Решение. Трапеция полностью определена, так как четыре элемента-условия заданы (перечислите их самостоятельно). Строить решение этой задачи можно по-разному.



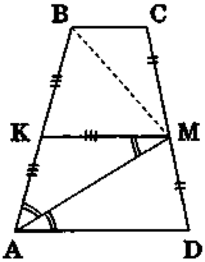
Вариант 1. Можно, например, доказать, что BM является биссектрисой угла ABC. Ведь действительно, точка M равноудалена от сторон AB и AD трапеции, т.к. лежит на биссектрисе угла BAD. С другой стороны, точка M равноудалена от сторон AD и BC (для обоснования этого утверждения через точку M проведите общий перпендикуляр к двум параллельным прямым AD и BC и из равенства $CM = MD$ покажите равенство соответствующих прямоугольных треугольников). Тогда получается, что точка M равноудалена от сторон AB и BC, а значит, она лежит на биссектрисе угла ABC.



Далее просто. Так как биссектрисы углов, прилежащих к боковым сторонам трапеции, перпендикулярны, из прямоугольного треугольника ABM по теореме Пифагора получаем $BM = 3$.

Вариант 2. А можно сделать дополнительное построение, продолжив прямую AM за точку M до пересечения с прямой $BC \parallel AD$ в точке E. При этом сразу же образуется равнобедренный треугольник ABE (т.к. углы BAE, EAD и BEA равны), в котором BM — медиана (равенство $AM = ME$ следует из равенства треугольников AMD и EMC), а значит, и высота. Далее действуем аналогично предыдущему.

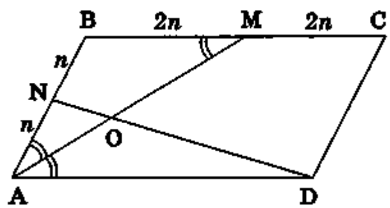
Вариант 3. И, наконец, можно дополнительное построение сделать таким — провести прямую $MK \parallel BC$ до пересечения с AB в точке K. Но тогда MK — средняя линия трапеции, а это значит $AK = KB$. Но ΔAKM — равнобедренный (биссектриса угла пересекает прямую, параллельную одной из его сторон), а потому $AK = KM$. То есть в треугольнике ABM точка K равноудалена от всех вершин, значит, она является центром описанной окружности, а так как лежит на стороне треугольника, то треугольник прямоугольный. Заключительный расчет аналогичен проведённым в предыдущих двух случаях.



Согласитесь, что в каждом из этих решений много полезного. Поэтому всё было так подробно... **Ответ: 3.**

Задача 3. В параллелограмме $ABCD$ точка N — середина стороны AB, точка M — середина стороны BC, отрезки AM и DN пересекаются в точке O. Найти $NO : OD$, если $BC = 2AB$.

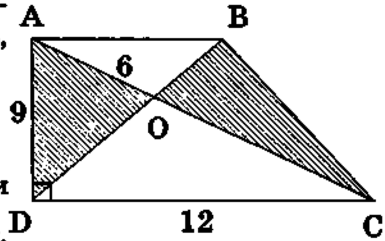
Решение. В условии задачи различные отрезки сравниваются между собой. Выразим их в одних единицах измерения. Обозначим $AN = NB = n$, тогда по условию $BC = AD = 4n$, $BM = MC = 2n = AB$. Следовательно, ΔABM — равнобедренный, $\angle BAM = \angle BMA$.



Но $\angle BMA = \angle MAD$ (накрест лежащие углы — вот где «сработала» параллельность!), а значит, $\angle BAM = \angle MAD$.

Поэтому AM — биссектриса $\angle BAD$. И по теореме о биссектрисе в ΔAND получим: $NO : OD = AN : AD = n : 4n$. **Ответ: 1/4.**

Задача 4 *(МГУ, геолог. ф-т, 1996)*. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $CD = 12$, а отрезок AO, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найти площадь треугольника BOC.

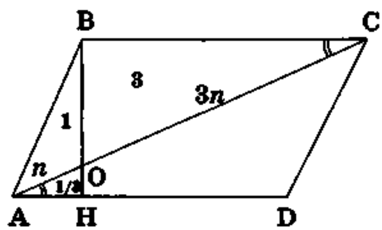


Решение. 1) ΔADC — прямоугольный $\Rightarrow AC^2 = 9^2 + 12^2$ (т. Пифагора), $AC = 15 \Rightarrow OC = 9$.

2) $S_{BOC} = S_{DOA} = \frac{6}{15} S_{DCA} = \frac{6}{15} \cdot \frac{9 \cdot 12}{2} = \frac{108}{5}$ (т. к. треугольники DOA и DCA имеют общую высоту, выходящую из вершины D).

Ответ: 21,6.

Задача 5. Высота BH параллелограмма $ABCD$ площадью 8 пересекает диагональ AC в точке O. Площадь треугольника BOC равна 3. В каком отношении точка H делит сторону AD.



Решение. 1) $S_{ABC} = 4$ (диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника) $\Rightarrow S_{ABO} = 1$ $\Rightarrow AO : OC = S_{ABO} : S_{OBC} = 1 : 3$ (у треугольников ABO и OBC — общая высота).

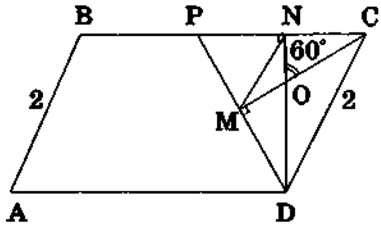
2) $\Delta AOH \sim \Delta COB$ (по двум углам), $k = AO : OC = 1 : 3 \Rightarrow OH : BO = 1 : 3 \Rightarrow S_{HAO} : S_{OAB} = 1 : 3 \Rightarrow S_{HAO} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{HAB} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

3) $AH : HD = S_{HAB} : S_{HBD}$, $S_{ABD} = 4$ (половина площади параллелограмма), $S_{HBD} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow AH : HD = 1 : 2$.

Ответ: 1 : 2.

Приём, позволяющий получать информацию о пропорциях из сравнения площадей треугольников, можно применить при решении этой задачи и в такой форме: треугольники ACD и AOH имеют общий угол, а это значит отношение их площадей и отношения их соответствующих сторон связаны. Следовательно, $AH : HD$ можно вычислить, т.к. все остальные пропорции определены (проведите эти вычисления самостоятельно).

Задача 6. В параллелограмме $ABCD$ со стороной $AB = 2$ биссектрисы углов BCD и ADC пересекаются в точке M. Высота DN, опущенная из вершины D на сторону BC, пересекает отрезок MC в точке O так, что $\angle NOC = 60°$. Найти длину отрезка MN.



Решение. Так как биссектрисы углов, прилежащих к стороне параллелограмма, перпендикулярны $\angle DMC = 90°$. Дальше решение можно проводить по-разному — всё зависит от выбора дополнительного построения.

Вариант 1. Если, например, продлить DM до пересечения с BC в точке P, то несложно показать, что полученный треугольник CPD будет равносторонним. Действительно, из прямоугольного ΔONC следует: $\angle NCO = 30°$ и, с учетом того, что CO — биссектриса, $\angle NCD = 60°$. Но из прямоугольного ΔMCD также получается, что $\angle CDM = 60°$, что доказывает это утверждение. А в равностороннем ΔPCD: DN и CM — высоты, а значит, и медианы. Следовательно, MN — средняя линия, а потому $MN = 1$.

Вариант 2. Если же заметить (и обосновать), что точки M и N лежат на одной окружности, диаметром которой является отрезок $CD = 2$, то для вписанного в эту окружность ΔMCN из теоремы синусов получим: $MN = 2R\sin 30°$, где $R = 1$. **Ответ: 1.**

Есть ещё три типа четырёхугольников — разновидностей параллелограмма, интересные в первую очередь тем, что «узнавать» в задачах их приходится чаще всего не по определению, а скорее по их характеристическим свойствам, из этого определения следующим. Это, конечно же, *ромб* — параллелограмм, у которого все стороны равны, *прямоугольник* — параллелограмм, смежные стороны которого перпендикулярны, и *квадрат* — прямоугольник, все стороны которого равны. Хорошо известны главные свойства этих геометрических объектов.

1. *Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами соответствующих углов; высоты ромба равны.*

2. *Диагонали прямоугольника равны.*

3. *Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и равны.*

Однако важно помнить и то, что эти свойства являются характеристическими (или признаками) для каждой из фигур, то есть по ним эту фигуру можно также узнавать, как и по определению. Перечислим главные признаки каждой из описанных фигур.

1. *Четырёхугольник, у которого все стороны равны, является ромбом* (заметим ещё раз, что это не определение, а утверждение, вообще говоря, требующее доказательства).

2. *Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.*

3. *Параллелограмм, диагонали которого служат биссектрисами его углов, — ромб.*

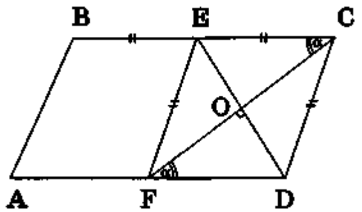
4. *Параллелограмм, имеющий равные высоты, — ромб.*

5. *Параллелограмм, диагонали которого равны, — прямоугольник.*

6. *Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны, — квадрат.*

Почему так важно выделять эти признаки фигур? Дело в том, что решение задач, в которых используется определение этих объектов или их свойства, ничем не отличается от решения многократно рассмотренных нами задач на расчет параллелограммов. Однако существует целый класс задач, в которых надо определить структуру исследуемого объекта, исходя из каких-то появляющихся в процессе решения условий, и тогда всё, о чем здесь говорилось, может очень пригодиться. Приведём примеры.

Задача 7. В параллелограмме $ABCD$ через середину E стороны BC проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая AD в точке F. Известно, что сумма углов ECF и EDF равна $90°$. Найти отношение длин сторон параллелограмма.



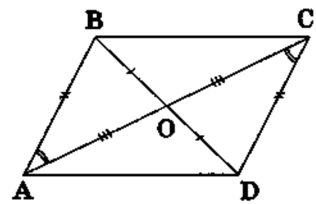
Решение. 1) $EF \parallel AB \Rightarrow ECDF$ — параллелограмм. Обозначим точку пересечения ED и FC через O.

2) $\angle ECF = \angle CFD$ (накрест лежащие).

3) В ΔFOD: $\angle CFD + \angle EDF = 90° \Rightarrow FC \perp ED \Rightarrow ECDF$ — ромб $\Rightarrow EC = CD \Rightarrow BC : CD = 2 : 1$.

Ответ: 2 : 1

Задача 8. В четырёхугольнике $ABCD$: $AB = CD$, $\angle BAC = \angle ACD$, диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найти величину угла ADC, если $AO \cdot OC = BO \cdot OD$.

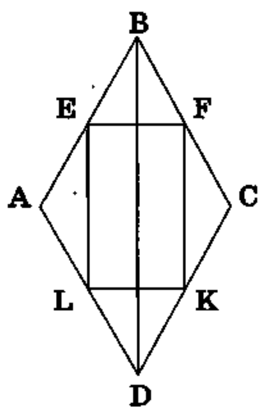


Решение. 1) $\angle BAC = \angle ACD \Rightarrow AB \| CD$.

2) $AB = CD$, $AB \| CD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow BO = OD$, $AO = OC$.

3) Т. к. $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, то $AO = BO$, $BD = AC$. Поэтому $ABCD$ — прямоугольник, $\angle ADC = 90°$. **Ответ: 90°.**

Задача 9. Доказать, что середины сторон ромба служат вершинами прямоугольника, а середины сторон прямоугольника — вершинами ромба.



Решение. Докажем только первую часть утверждения. Вторую попробуйте обосновать самостоятельно. Обозначим через E, F, K, L середины соответствующих сторон ромба AB, BC, CD и DA.

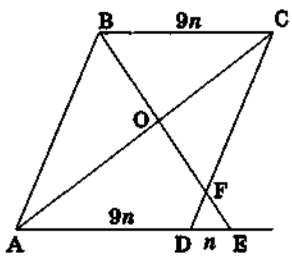
1) В ΔABD: EL — средняя линия $\Rightarrow EL \| BD$, $EL = \dfrac{BD}{2}$; в ΔBDC: FK — средняя линия $\Rightarrow$ $FK \| BD$, $FK = \dfrac{BD}{2}$. Следовательно, $EL \| FK$, $EL = FK \Rightarrow EFKL$ — параллелограмм (отметим, что *этот факт верен и для произвольного выпуклого четырёхугольника $ABCD$*).

2) $BE \,||\, CK$, $BE = CK \Rightarrow BCKE$ — параллелограмм $\Rightarrow EK = BC$. Аналогично $LF = AB$. Но $AB = BC$ (по условию) $\Rightarrow EK = LF \Rightarrow EFKL$ — прямоугольник. Утверждение доказано.

Можно было, конечно, рассуждать ещё проще: $EL \| FK \| BD$, $EF \| LK \| AC$. Но $BD \perp AC$, поэтому $EL \perp EF$.

И в заключение параграфа разберём две задачи на перенос пропорций в четырехугольниках с параллельными сторонами. Дело в том, что наличие параллельных прямых, заданных в условии задачи, часто позволяет при её решении обойтись меньшим количеством дополнительных построений, а то и не проводить их вообще.

Задача 10. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведена прямая BE пересекающая сторону CD в точке F, прямую AD — в точке E, диагональ AC — в точке O. Найти отношение $DF : FC$, если $BO : OE = 9 : 10$.



Решение. 1) $\Delta COB \sim \Delta AOE$ (по двум углам — обосновать) $\Rightarrow BC : AE = BO : OE = 9 : 10$. Обозначим для удобства $BC = AD = 9n$, тогда $AE = 10n$, $DE = AE - AD = n$.

2) $\Delta CFB \sim \Delta DFE$ (по двум углам) $\Rightarrow DF : FC = DE : BC = n : 9n$.

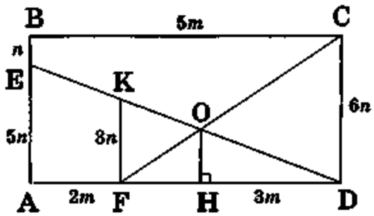
Ответ: 1 : 9

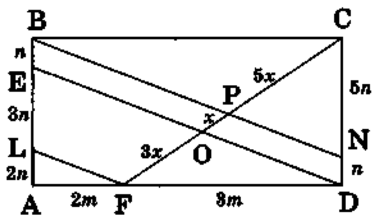
Задача 11 *(МГУ, ИСАА, 1997)*. В прямоугольнике $ABCD$, площадь которого равна 30, на сторонах AB и AD выбраны соответственно точки E и F так, что $AE : EB = 5:1$, $AF : FD = 2 : 3$. Найти площадь треугольника FOD, где O — точка пересечения отрезков DE и CF.

Решение. Обозначим для удобства $BE = n$, $AF = 2m$. Тогда по условию и свойствам прямоугольника $AE = 5n$, $FD = 3m$, $CD = 6n$, $BC = 5m$, $S_{ABCD} = 30mn = 30 \Rightarrow mn = 1$. Проведём в ΔFOD высоту OH. Понятно, что для определения площади этого треугольника необходимо OH выразить через n, а для этого нужно узнать отношение $FO : FC$ (которое равно $FH : FD = OH : CD = OH : 6n$), либо отношение $OD : ED$ (равное $DH : AD = OH : 5n$). Займёмся определением первой из этих пропорций, предложив провести вычисление второй самостоятельно. Кроме того отметим, что те же самые результаты мы получили бы, если бы стали определять искомую площадь как часть площади треугольника FCD, т.к. $S_{FOD}:S_{FCD} = FO:FC$ (треугольники с общей вершиной и основаниями, лежащими на одной прямой), а $S_{FCD} = 9mn = 9$.

Определение отношения $FO : FC$ требует проведения дополнительного построения, а в этом деле у нас уже есть некоторый опыт (вспомним раздел 1.6).

1 способ (самый короткий). Из точки F проведем прямую $FK \parallel CD$ до пересечения с ED в точке K. Тогда из подобия треугольников FKD и AED ($k = 3m : 5m$) получаем $FK = 3n$. А из подобия треугольников FKO и DCO ($k = 3n : 6n$), находим: $FO : OC = 1 : 2$ или $FO : FC = 1 : 3$.



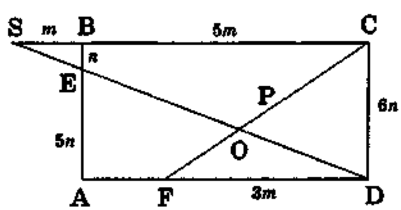


2 способ (перенос пропорций с помощью теоремы Фалеса). Проведём $FL \parallel DE$ и $BN \parallel DE$ до пересечения с AB и CD соответственно в точках L и N.

Тогда $BE = DN = n$ (т.к. $BNDE$ — параллелограмм) и соответственно $CN = 5n$. Пересечение BN с FC назовём точкой P. По теореме Фалеса $OP : PC = DN : NC = 1 : 5$. Аналогично $AL : LE = AF : FD = 2 : 3$, откуда, учитывая, что $AE = 5n$, получаем $LE = 3n$.

Используем теорему Фалеса в третий раз: $FO : OP = LE : BE = 3n : n$. Обозначив $OP = x$, находим $PC = 5x$, $FO = 3x$, следовательно, $FO : FC = 3x : 9x = 1 : 3$.

3 способ (его особенность в том, что мы «выходим» за пределы исследуемой фигуры, чего боятся многие школьники...). Продолжим прямые BC и DE до пересечения в точке S вне нашего прямоугольника. Тогда из подобия треугольников SBE и SCD



($k = n : 6n$), получим $SC = 6m$. А уже из подобия треугольников SCO и DFO ($k = 6m : 3m$), находим $FO : OC = 1 : 2$ или $FO : FC = 1 : 3$.

Заключительные вычисления во всех трёх случаях одинаковые: $OH : CD = FO : FC = 1 : 3 \Rightarrow OH = 2n$, $S_{FOD} = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot 2n = 3mn = 3$.

Ответ: 3.

Выбор оптимального пути решения планиметрической задачи — тема всей нашей книги. Предлагая сейчас несколько способов решения одной задачи, мы в который раз пытаемся сформировать у вас уверенность в том, что выбор этот почти всегда есть. Поэтому, разбирая решения задач настоящего пособия, старайтесь сначала предложить что-то своё, а если не получается, изучите решение по книге и после этого ещё раз сделайте попытку создания какого-то своего варианта решения. Безусловно, это всегда очень полезно.

В следующем параграфе мы продолжим изучение особенностей, которые вносит наличие в задаче параллельных прямых. Однако предметом нашего исследования будут только трапеции — объекты, в планиметрии очень распространённые, решение задач с которыми имеет свои специфические закономерности.

Задачи для самостоятельного решения

1. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали $BD = 2$, $DAC = DBC = 30°$. Найти расстояние от вершины D до диагонали AC.

2. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям. Точка E — середина CD, AE — биссектриса угла BAD, $BC = 1$, $AD = 2$. Найти AB.

3. В параллелограмме $ABCD$ из вершины C проведена биссектриса угла BCD, пересекающая сторону AD в точке E. Из точки E проведены биссектрисы углов AEC и CED, пересекающие прямую BC соответственно в точках F и M. Найти диаметр описанной вокруг треугольника FEM окружности, если $EC = 2$.

4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M так, что $AM = 4$, $MB = 1$. Найти радиус этой окружности.

5. В трапеции $ABCD$ меньшее основание $BC = 8$, высота равна 4. Диагональ AC делит трапецию на два треугольника ABC и ACD, разность площадей которых равна 8. Найти длину средней линии трапеции.

6. В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC взята точка M так, что $BM = AB$. Определить величину угла MAC, если $\angle CAD = 20°$, а $\angle ADC = 120°$.

7. Диагональ трапеции делится в точке пересечения другой диагональю в отношении 2 : 3. Средняя линия трапеции равна 50. Найти основания трапеции.

8 *(МГУ, геолог. ф-т, 1987)*. Найти диагональ ромба, если его сторона равна стороне равностороннего треугольника с площадью $25\sqrt{3}$, а другая диагональ равна 16.

9 *(МГУ, географ. ф-т, 2003)*. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, перпендикулярны. Известно, что $AC = 4$, $\angle CAB + \angle DBA = 75°$. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$ и сравнить её с числом $2\sqrt{15}$.

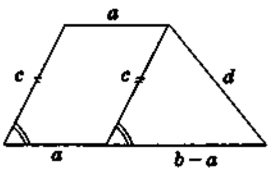
10. В параллелограмме $ABCD$ точка F принадлежит стороне BC, точка E — стороне AD так, что справедливо отношение площадей треугольников $S_{ABE} : S_{BEF} : S_{EFD} = 1:2:3$. Определить площадь четырёхугольника $EMND$, где M — точка пересечения отрезков BD и EF, N — точка пересечения отрезков FD и EC, а площадь треугольника ABE равна 1.

§ 2.3. СПЕЦИФИКА ТРАПЕЦИЙ

Продолжим разговор о дополнительных построениях.

Мы уже отмечали, что, помимо самостоятельного решения большого количества задач, развитие геометрической интуиции учащегося базируется также на изучении геометрического опыта, накопленного другими исследователями, на освоении стандартных методических приёмов, удачных дополнительных построений. Собственно этим мы сейчас и займёмся, подвергнув анализу геометрическую фигуру, в которой проведение дополнительного построения является неотъемлемым элементом решения почти любой задачи. Речь идёт о трапеции.

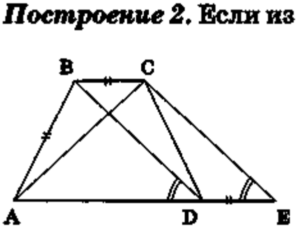
Сначала перечислим основные, наиболее распространенные построения, которые встречаются в задачах на трапеции. С некоторыми из них ранее мы уже познакомились.



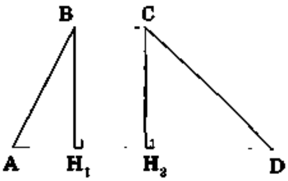
Построение 1. Если через вершину меньшего основания трапеции провести прямую, параллельную её боковой стороне, до пересечения со вторым основанием, трапеция разбивается на два хорошо знакомых нам объекта — параллелограмм и треугольник, каждый из которых определяется уже тремя элементами. Проведение такого построения удобно в тех случаях, когда хотя бы одна из этих фигур определяется заданными в условии элементами полностью. Тогда у нас появляется возможность использовать информацию о других элементах этой фигуры, т.е. происходит продвижение в решении задачи.

Например, действуя так, легко построить трапецию по четырём сторонам. Сначала мы по известным трём сторонам — c, d и $(b-a)$ — фиксируем на плоскости треугольник, а затем достраиваем к одной из его сторон длины c параллелограмм, угол между сторонами которого уже определён построенным треугольником.

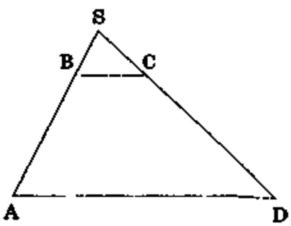
Построение 2. Если из вершины C меньшего основания трапеции $ABCD$ провести прямую CE, параллельную диагонали BD, до пересечения с AD в точке E, получится треугольник ACE, две стороны которого равны диагоналям трапеции, а длина третьей равна сумме длин оснований трапеции. Удобство это-



го построения, как уже отмечалось ранее, заключается ещё и в том, что площадь трапеции $ABCD$ становится равной площади вновь образованного ΔACE.



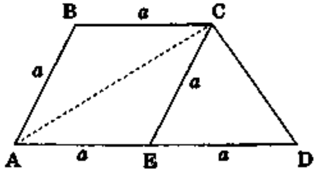
Построение 3. Часто в задачах на расчет трапеций из вершин меньшего основания опускают две высоты BH_1 и CH_2. При этом, с одной стороны, на прямой, содержащей нижнее основание фиксируется отрезок H_1H_2, длина которого равна BC (что удобно), а с другой, — в силу равенства высот $BH_1 = CH_2$, у нас появляется возможность для обмена информацией между двумя прямоугольными треугольниками ABH_1 и CDH_2. Высота трапеции при этом становится общим связующим элементом этих треугольников.



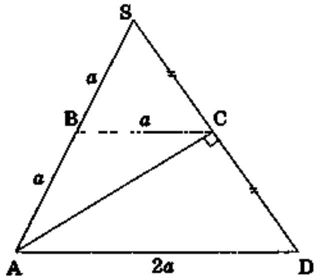
Построение 4. Одним из самых распространённых дополнительных построений в задачах с трапециями является процедура достраивания трапеции $ABCD$ до треугольника ASD, вершина S которого образуется при пересечении продолжений боковых сторон трапеции. Это удобно, так как в результате мы получаем объект, намного более привычный и хорошо отработанный, определяемый к тому же меньшим количеством элементов. Такая геометрическая конструкция обладает специфическими свойствами, которые мы разберём отдельно в конце этого параграфа. Отметим, что чаще всего такое дополнительное построение проводят в задачах, в которых заданы длины оснований трапеции либо их отношение. В этом случае информацию из трапеции можно перенести на весь ΔASD, используя подобие треугольников SBC и SAD.

В задачах нам будут встречаться и другие дополнительные построения, однако, перечисленные выше, являются для трапеций наиболее характерными, поэтому, решая задачу, надо помнить о перспективности проведения таких действий. Проиллюстрируем их применение в ряде задач.

Задача 1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отношение сторон равно $AB : BC : AD = 1 : 1 : 2$. Определить величину угла ACD.



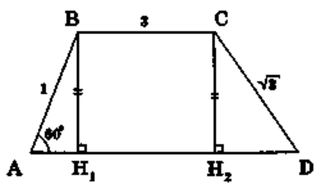
Решение 1. Из вершины C проведём прямую $CE \parallel AB$ до пересечения с AD в точке E (построение 1). Обозначим для удобства $AB = a$, тогда по условию $BC = a$, $AD = 2a$. Кроме того, из построения следует, что $CE = a$, $AE = a$, а потому и $ED = a$. В результате мы получили, что в ΔACD точка E равноудалена от всех его вершин, т.е. она является центром описанной окружности. А так как E принадлежит AD, то ΔACD — прямоугольный, $\angle ACD = 90°$.



Решение 2. Тот же результат можно получить, достроив трапецию до треугольника ASD (построение 4). Тогда BC в этом треугольнике будет средней линией, следовательно, $AS = 2AB = 2a$. Но это означает, что ΔASD — равнобедренный ($AS = AD = 2a$), в котором AC — медиана, а значит, и высота.

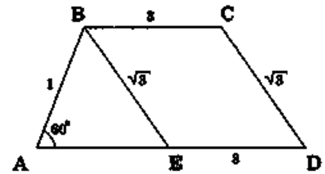
Ответ: $90°$.

Задача 2. В трапеции $ABCD$ угол BAD при основании AD равен $60°$, угол ADC — острый, $AB = 1$, $BC = 3$, $CD = \sqrt{3}$. Найти AD.



Решение 1. Из вершин B и C трапеции проведем её высоты $BH_1 = CH_2$ (построение 3). Тогда из соотношений в прямоугольном ΔABH_1 получим $AH_1 = AB\cos60° = \frac{1}{2}$, $BH_1 = AB\sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $BH_1 = CH_2$, из прямоугольного ΔCDH_2 по теореме Пифагора найдем $H_2D = \frac{3}{2}$. Кроме того, так как $H_1H_2 = BC = 3$, получим искомое $AD = AH_1 + H_1H_2 + H_2D = 5$.

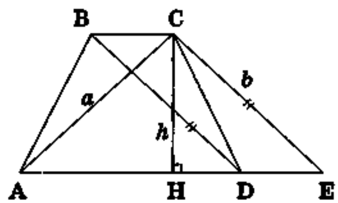
Заметим, что если бы в условии не было сказано о том, что угол ADC — острый, то возможна была бы ещё одна конфигурация, при которой точка D находится левее, чем H_2. В этом случае $AD = AH_1 + H_1H_2 - H_2D = 2$.



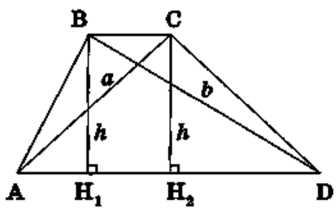
Решение 2. Из вершины B проведём прямую $BE \parallel CD$ до пересечения с AD в точке E (построение 1). Тогда $ED = 3$, и для определения AD необходимо вычислить AE. Это возможно из ΔABE, который полностью определён. По теореме косинусов, учитывая, что $BE = \sqrt{3}$, получим $3 = 1 + AE^2 - 2 \cdot 1 \cdot AE \cdot \cos 60°$ или $AE = 2$ (второй корень уравнения — отрицательный). В итоге, $AD = 5$. Решение практически не изменится, если вместо BE провести прямую $CK \parallel AB$ до пересечения с AD в точке K.

Ответ: 5.

Задача 3. Найти площадь трапеции с острыми углами при большем основании, зная длины её диагоналей a, b и длину высоты h.



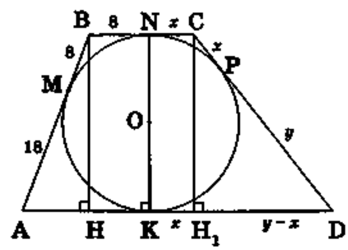
Решение 1. Проведя CE параллельно диагонали BD (построение 2) и учитывая, что $S_{ABCD} = S_{ACE}$, сведём задачу к вычислению площади треугольника ACE со сторонами a, b и высотой h (обозначим ее CH). Для её решения достаточно дважды применить теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках ACH и CHE с целью определения их катетов AH и HE.



Решение 2. Можно, однако, выполнить построение 3, проведя высоты $BH_1 = CH_2 = h$ и определив из прямоугольных треугольников ACH_2 и BDH_1 катеты $AH_2 = \sqrt{a^2 - h^2}$ и $DH_1 = \sqrt{b^2 - h^2}$. Далее, заметив, что $BC + AD = H_1H_2 + AD = AH_2 + H_1D$, используем выражение площади трапеции через полусумму оснований, умноженную на высоту, и получаем ответ.

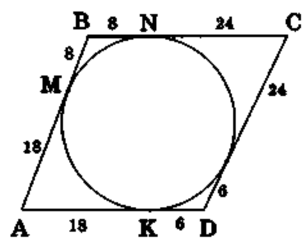
Ответ: $S = h\left(\sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}\right)/2$.

Задача 4. В трапецию $ABCD$, периметр которой равен 112, вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M так, что $BM = 8$, $AM = 18$. Найти длины оснований BC и AD трапеции.



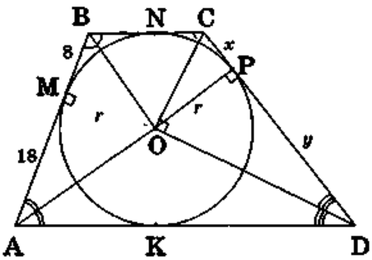
Решение 1. Обозначим через N и K точки касания окружности с основаниями трапеции, P — с боковой стороной CD, тогда $BN = BM = 8$ и $AK = AM = 18$ (равенство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки). Соединим отрезком точки N и K. Учитывая что центр окружности лежит на середине NK, мы получим две прямоугольные трапеции $ABNK$ и $NCDK$.

Проведя в первой из них высоту BH, из прямоугольного ΔABH найдем её длину $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 24$, т.к. $AB=26$ и $AH = 10$. Если во второй трапеции также провести высоту CH_1, длина которой очевидно также будет равна длине $BH = 24$, и взять за неизвестные длины отрезков касательных, проведённых к окружности из точек C и D: $CN = CP = x$, $DK = DP = y$, из прямоугольного ΔCH_1D, в котором катет $H_1D = y - x$, получим первое замыкающее соотношение: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 24^2$ (теорема Пифагора).



Второе соотношение можно найти, выразив периметр $ABCD$ через x и y: $2\cdot 26 + 2\cdot(x+y) = 112$ или $x + y = 30$. Подставив его в первое уравнение, получим два значения $x - y = \pm 18$.

Дальнейшие несложные выкладки дают две пары возможных значений x и y: $x = 24$, $y = 6$ и $x = 6$, $y = 24$. Учитывая, что $BC = x + 8$, $AD = y + 18$, получим два варианта ответа у этой задачи: $BC = 32$, $AD = 24$ и $BC = 14$, $AD = 32$ (второй вариант также показан на рисунке).

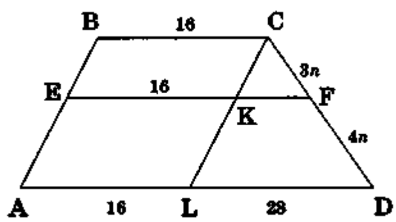


Решение 2. Приведённое решение могло бы быть короче, если заметить, что точка O — центр вписанной в трапецию окружности — является вершиной двух прямоугольных треугольников ABO и COD (обоснуйте самостоятельно), а радиусы этой окружности, проведённые из O в точки касания M и P, являются высотами в этих треугольниках, то есть их величины связаны с проекциями соответствующих катетов соотношениями: $r^2=18\cdot 8=xy$ (здесь r^2 выполняет «посреднические» функции, являясь общим связующим элементом). Второе замыкающее соотношение и дальнейшее решение полученной системы из двух уравнений с двумя неизвестными аналогично приведённому в решении 1.

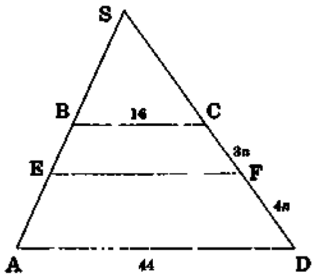
Ответ: а) 14; 32. б) 32; 24.

Задача 5 *(МГУ, эконом. ф-т, 1998, общеобраз. тест).* Длины оснований трапеции равны 16 и 44. Концы отрезка, параллельного основаниям лежат на боковых сторонах трапеции и делят их в отношении 4 : 3, считая от большего основания. Найдите длину этого отрезка.

Обозначим вершины трапеции через A, B, C, и D, концы заданного отрезка — через E и F, длины отрезков $DF = 4n$, $CF = 3n$.



Решение 1. Выполним построение 1, проведя $CL \parallel AB$ до пересечения с AD в точке L и с EF — в точке K. Тогда $BC=EK=AL=16$, $LD=44-16=28$. Из подобия треугольников CKF и CLD ($k=3n:7n$), получим $KF=28\cdot\dfrac{3}{7}=12$, а потому $EF=16+12=28$.



Решение 2. Достроив трапецию до треугольника ASD, мы сразу получим несколько пар подобных треугольников.

1) $\Delta SBC \propto \Delta SAD \Rightarrow \dfrac{SC}{SC+7n} = \dfrac{16}{44} \Rightarrow SC = 4n$.

1) $\Delta SBC \propto \Delta SEF \Rightarrow \dfrac{16}{EF} = \dfrac{4n}{7n} \Rightarrow EF = 28$.

Ответ: 28.

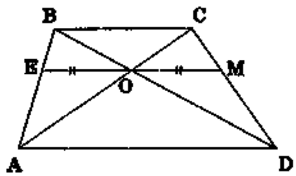
В связи с последней задачей хочется сделать одно *предостережение*, касающееся трапеций. Посмотрев на рисунок в этой задаче, можно подумать, что трапеции $ABCD$, $AEFD$ и $EBCF$ являются подобными — ведь все углы при вершинах у них равны. Это заблуждение! Стороны этих трапеций в результате преобразования одной из них в другую изменяются непропорционально. Например, у $ABCD$ и $EBCF$ верхние основания одинаковы, а боковые стороны относятся как 3 : 7. Это приводит к тому что, например, углы CEF и CAD уже равными не будут, а значит, не будет выполняться одно из главных требований подобия о равенстве углов между ***любыми*** сходственными элементами. Обратите внимание, *одного равенства углов при вершинах трапеций для их подобия недостаточно!* Трапеции подобны только тогда, когда подобны, причем с одинаковым коэффициентом подобия, треугольники, на которые они разбивается любой из соответствующих диагоналей. Вот тогда все углы между сходственными элементами будут равными, а сами эти элементы будут пропорциональными.

Многоугольники подобны, если 1) равны все углы при соответственных вершинах и 2) соответственные стороны пропорциональны.

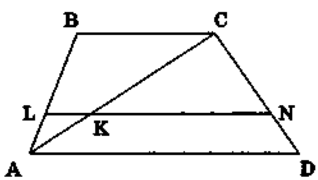
Но мы сформулируем следующую рекомендацию: свойства подобия в задачах с многоугольниками лучше «от греха подальше» для всей фигуры не использовать. А вот отдельные треугольники, являющиеся элементами этой фигуры, вполне могут быть при этом подобными, что, конечно, упускать из виду никак нельзя.

Разберём теперь несколько полезных свойств и интересных фактов, следующих из подобия треугольников внутри трапеции. Чтобы сразу показать, как эти свойства «работают», будем параллельно с этим продолжать рассмотрение различных задач, в которых они активно используются.

1. Точка пересечения диагоналей трапеции является серединой отрезка прямой, проходящей через эту точку параллельно её основаниям, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции.



Обозначим точку пересечения диагоналей AC и BD трапеции через O, а точки пересечения прямой, проходящей через O параллельно основаниям, с боковыми сторонами трапеции через E и M. Данное свойство является следствием подобия двух пар треугольников $\Delta ABD \sim \Delta EBO$ и $\Delta ACD \sim \Delta OCM$ с одинаковым коэффициентом подобия (что следует из теоремы Фалеса для прямых AB и CD, пересечённых параллельными прямыми BC, EM и AD): $\frac{EO}{AD} = \frac{BE}{AB}, \frac{OM}{AD} = \frac{CM}{CD}, \frac{BE}{AB} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow EO = OM$.

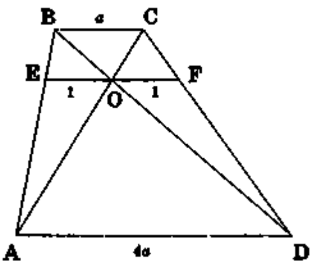


2. Если в трапеции ABCD провести диагональ AC и произвольную прямую, параллельную основаниям, пересекающую боковые стороны трапеции в точках L и N, а AC — в точке K, то образованные при этом две пары подобных треугольников $\Delta ALK \sim \Delta ABC$ и $\Delta CKN \sim \Delta CAD$ будут иметь коэффициенты подобия, сумма которых равна единице.

Это свойство следует из очевидного соотношения $\frac{AK}{AC} + \frac{KC}{AC} = 1$.

Использование этих свойств в задачах бывает чрезвычайно полезным.

Задача 6 *(МГУ, ф-т почвовед., 1993)*. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Найдите длины оснований, если их отношение равно 4.

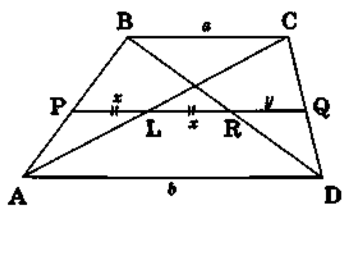


Решение. Обозначим точку пересечения диагоналей трапеции через O, длины оснований $BC = a$, $AD = 4a$. Тогда из свойства 1 следует, что $EO = OF = 1$. А из свойства 2, учитывая, что $\frac{AO}{AC}=\frac{1}{a}$ и $\frac{CO}{AC}=\frac{1}{4a}$, получаем $\frac{1}{a}+\frac{1}{4a}=1$, откуда $a=\frac{5}{4}$.

Ответ: 5/4; 5.

Отметим, что правильное решение этой и последующих задач, использующих обсуждаемые свойства, состоит не только в формулировании этих фактов, но и в обязательном их обосновании в процессе решения. Приводимые нами обоснования каждого из этих свойств вполне могут при этом стать элементами вашего решения на экзамене.

Задача 7 *(МГУ, биологич. ф-т, 1970)*. Дана трапеция $ABCD$, причем $BC = a$ и $AD = b$. Параллельно ее основаниям BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC в точке L, диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q. Известно, что $PL = LR$. Найти PQ.



Решение. Обозначим $PL = LR = = x$, $RQ = y$.

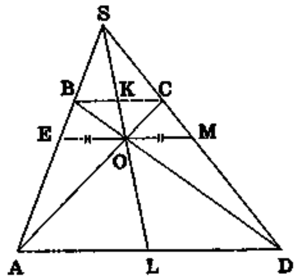
1) $\Delta APL \sim \Delta ABC$: $\frac{x}{a}=\frac{AP}{AB}$, $\Delta DRQ \sim \Delta DBC$: $\frac{y}{a}=\frac{QD}{DC}$, но по теореме Фалеса $\frac{AP}{AB}=\frac{QD}{DC}$. Следовательно, $x = y$.

2) $\Delta APL \sim \Delta ABC$, $\Delta CLQ \sim \Delta CAD \Rightarrow \dfrac{x}{a}+\dfrac{x+y}{b}=1$ (по свойству 2).

После несложных выкладок получим $x = \dfrac{ab}{2a+b}$ и $PQ = 3x = \dfrac{3ab}{2a+b}$.

Ответ: $\dfrac{3ab}{2a+b}$.

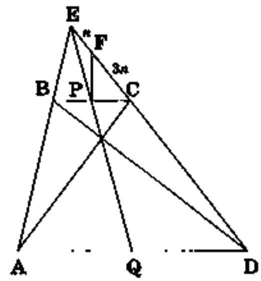
3. В любой трапеции прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон и точку пересечения диагоналей, делит каждое из оснований на две равные части.



Обозначим через S точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции $ABCD$, O — точку пересечения ее диагоналей, K и L — точки пересечения прямой SO с основаниями соответственно BC и AD. Проведём через точку O прямую, параллельную основаниям и пересекающую боковые стороны AB и CD в точках E и M соответственно. Тогда по свойству 1: $EO = OM$. Рассмотрим далее две пары подобных треугольников, образованных при таком построении: $\Delta SBK \sim \Delta SEO$ и $\Delta SKC \sim \Delta SOM$. При этом коэффициент подобия в каждой из пар одинаков и равен $SK : SO$. А это значит, что $\dfrac{BK}{EO}=\dfrac{KC}{OM}=\dfrac{SK}{SO}$. Учитывая равенство EO и OM, получим $BK = KC$. Аналогичным образом доказывается равенство $AL = LD$ (проведите обоснование самостоятельно).

Задача 8 *(МГУ, биологич. ф-т, 1983)*. Площадь трапеции $ABCD$ равна 6. Пусть точка E — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание BC в точке P, а большее основание AD — в точке Q. Точка F лежит на отрезке EC, причем $EF : FC = EP : EQ = 1 : 3$. Найти площадь треугольника EPF.

Решение. Это классический вариант задачи на использование метода площадей. Ведь искомая площадь — часть площади ΔEPC, который, в свою очередь, является частью ΔEBC, подобного ΔEAD.



1) EP и EQ — медианы в треугольниках EBC и EAD (свойство 3).

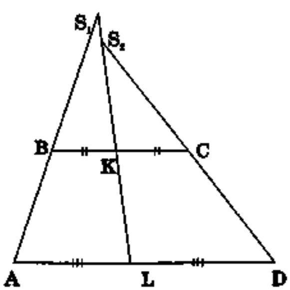
2) $\Delta EBC \sim \Delta EAD$, $k = EP : EQ = 1 : 3 \Rightarrow$ $\frac{S_{EBC}}{S_{EAD}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Обозначим $S_{EBC} = x$. Тогда $\frac{x}{x+6} = \frac{1}{9}$ или $x = 3/4$.

3) $S_{EPC} = \frac{x}{2} = \frac{3}{8}$ (медиана EP делит ΔEBC на два равновеликих).

4) $EF : FC = 1 : 3 \Rightarrow S_{EPF} : S_{EPC} = 1 : 4$ (у треугольников EPF и EPC общая высота) $\Rightarrow S_{EPF} = \frac{3}{32}$. **Ответ:** 3/32.

4. Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежит на прямой, проходящей через середины оснований трапеции.

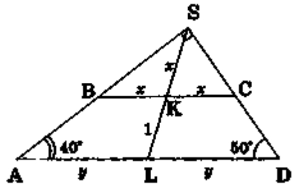
Проведём через середины K и L соответствующих оснований BC и AD трапеции $ABCD$ прямую KL до пересечения с продолжением боковой стороны AB в точке S_1 и с продолжением боковой стороны DC в точке S_2. Тогда из подобия треугольников S_1BK и S_1AL следует $\frac{AL}{BK} = \frac{S_1L}{S_1K} = \frac{S_1K+KL}{S_1K} = 1 + \frac{KL}{S_1K}$. Аналогично, из подобия треугольников S_2KC и S_2LD: $\frac{LD}{KC} = \frac{S_2L}{S_2K} = 1 + \frac{KL}{S_2K}$. Но по условию $AL = LD$, $BK = KC$, следовательно, $\frac{KL}{S_1K} = \frac{KL}{S_2K}$, что означает совпадение точек S_1 и S_2, т.к. $S_1K = S_2K$. Утверждение доказано.



Этот же факт можно было доказать ещё проще, если провести прямую через точку пересечения продолжений боковых сторон и точку пересечения диагоналей. В соответствии с утверждением 3 на этой прямой лежат середины оснований трапеции, а через две различные точки можно провести лишь одну прямую.

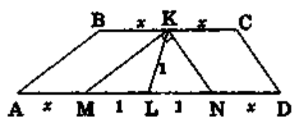
Задача 9 *(МГУ, мех-мат, 1980).* В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины $40°$ и $50°$. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований равна 1.

Эта задача, в зависимости от выбора дополнительного построения, может быть решена по-разному. Приведем два интересных её решения.



Решение 1. Достроим трапецию $ABCD$ до треугольника ASD (который оказывается при этом прямоугольным), продолжив боковые стороны AB и CD до пересечения в точке S. Но тогда (по свойству 4) прямая, проходящая через середины K и L оснований BC и AD, проходит и через S. То есть SK и SL (обозначим их через x и y) становятся медианами в соответствующих прямоугольных треугольниках SBC и SAD, что означает $SK = BK = KC = x$, $SL = AL = LD = y$.

Тогда по условию: $y - x = 1$, $y + x = 4$. Откуда $x = 3/2$, $y = 5/2$. Поэтому $BC = 3$, $AD = 5$.



Решение 2. Сделаем другое дополнительное построение, проведя из точки K прямые $KM \parallel AB$ до пересечения с AD в точке M и $KN \parallel CD$ до пересечения с AD в точке N. Тогда ΔMKN также окажется прямоугольным и отрезок KL в нем будет медианой (обоснуйте самостоятельно). Следовательно, $KL = LN = LM = 1$ (по условию). Обозначив $BK = KC = x$, получим $AL = LD = x + 1$. Длина средней линии трапеции в этом случае равна $2x + 1 = 4$, откуда $x = 3/2$, $BC = 3$, $AD = 5$.

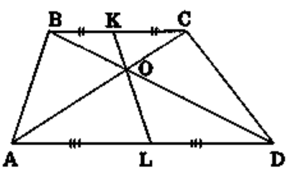
Ответ: 3; 5.

5. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и середину одного из оснований, делит другое основание пополам.

Доказать этот почти очевидный факт можно, например, рассматривая две пары подобных треугольников с общей вершиной в точке пересечения диагоналей трапеции и с одинаковым коэффициентом подобия (равным, кстати, отношению длин оснований трапеции). Попробуйте сделать это самостоятельно.

6. Точка пересечения диагоналей трапеции лежит на прямой, проходящей через середины её оснований.

Обозначим через K и L середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$. Отрезок KL пересекает диагональ BD в точке O_1 так, что $KO_1 : O_1L = BK : LD$ (следует из подобия треугольников BKO_1 и DLO_1). Этот же отрезок KL пересекает диагональ AC в точке O_2 так, что $KO_2 : O_2L = KC : AL$ (следует из подобия треугольников O_2KC и O_2LA). В силу заданных в условии равенств $BK = KC$, $AL = LD$ получим $KC : AL = BK : LD$.



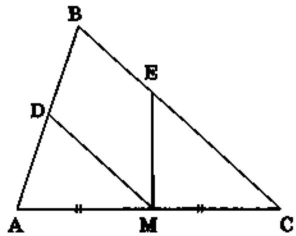
Поэтому $KO_1 : O_1L = KO_2 : O_2L$. Это означает, что O_1 совпадает с O_2 и эта точка лежит одновременно на AC, BD и KL, что и требовалось доказать.

Разумеется, и это, и предыдущее утверждение можно гораздо проще доказать на основе утверждения 3, проведя прямую через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон. Сделайте это самостоятельно.

Отметим, что два последних свойства верны и для параллелограммов (при их доказательстве нигде не используется факт неравенства длин оснований). Однако для параллелограммов они достаточно очевидны, поэтому обычно специальным образом их не выделяют.

Задача 10. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AB, точка E — на стороне BC, M — середина AC. Отрезок DCпересекается с отрезком AE в точке F. Площади четырехугольников $ABEM$ и $DBCM$ равны. Найти отношение длин отрезков $BF : FM$, если $AM = DE$.

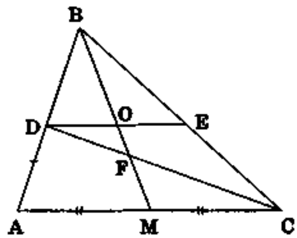
Решение. 1) Т. к. $S_{ABC} = S_{ABEM} + S_{MEC} = S_{DBCM} + S_{ADM}$, то с учетом условия получим $S_{MEC} = S_{ADM}$.



2) Длины оснований у треугольников MEC и ADM равны, значит, равны и высоты, проведённые к основаниям. Точки A, M и C лежат на одной прямой, следовательно, $DE \parallel AC$.

Сделаем новый чертеж!

3) Обозначим через O точку пересечения DE с BM. Тогда $DO = OE$ (докажите это самостоятельно).



4) $ADEC$ — трапеция, F — точка пересечения её диагоналей, O и M — середины диагоналей $\Rightarrow F \in OM$ (свойство 6).

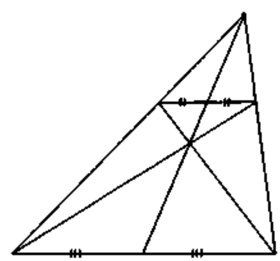
5) $DE = AM = AC/2 \Rightarrow BD = AD \Rightarrow CD$ — медиана в ΔABC.

6) BM — медиана в ΔABC, $BM \cap CD = F$ $\Rightarrow BF : FM = 2 : 1$ (свойство медиан треугольника).

Ответ: 2 : 1.

Наверняка, многие читатели уже догадались, что последние четыре свойства (свойства 3 — 6) можно объединить, сформулировав в виде следующего обобщающего утверждения:

Четыре характерные точки любой трапеции — точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон, середина верхнего и середина нижнего основания — лежат на одной прямой.

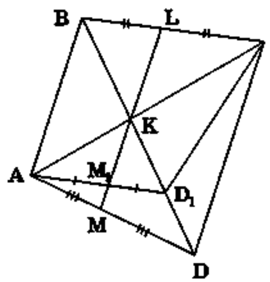


Учитывая, что прямая однозначно определяется двумя точками, мы можем, зная две из этих четырёх точек, сразу сообразить, где расположены оставшиеся две точки. Однако это обобщающее свойство трапеций удобно лишь для запоминания. Его полное обоснование на экзамене отнимет у вас много времени (а факты, в нём изложенные, требуют обоснования!). При этом в реальных задачах, как правило, требуется знание только одного, максимум двух из четырёх свойств, входящих в это обобщающее утверждение.

Именно поэтому, зная общее свойство, используйте в решении только ту его часть, которая действительно необходима, приводя при этом обоснование используемого факта (каждое из них нами сознательно проведено двумя способами).

Отметим также, что приведённое обобщающее свойство является для фигур с параллельными сторонами характеристическим — по нему в произвольном четырёхугольнике можно «увидеть» параллелограмм либо трапецию. Покажем это на примере задачи, где такое «распознавание» является ключевым элементом в решении.

Задача 11 *(МГУ, географ. ф-т, 1999)*. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются соответственно серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности, если $AB = 2$, $BD = 2\sqrt{5}$ и $LK : KM = 1 : 3$.

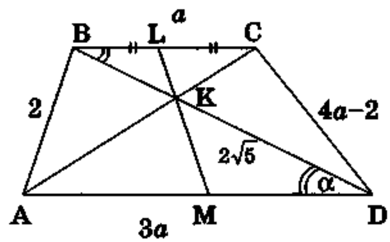


Решение. 1. Мы видим, что из четырёх характерных точек четырёхугольника три лежат на одной прямой. Покажем, что из этого следует параллельность его сторон BC и AD. Докажем это «от противного», то есть допустим, что BC и AD не параллельны, и покажем, что это противоречит геометрическим законам. Для этого через точку A параллельно BC проведём прямую AD_1 до пересечения с прямой BD в точке D_1. Но тогда $ABCD_1$ — трапеция либо параллелограмм и LK — прямая, проходящая через середину основания и точку пересечения диагоналей, а это значит, что точка M_1 пересечения LK и AD_1 делит отрезок AD_1 пополам (свойство 5).

В результате, в треугольнике ADD_1 отрезок MM_1 соединяет середины сторон AD и AD_1, т.е. является его средней линией. Но прямые MM_1 и DD_1 по условию пересекаются в точке K, что противоречит свойству средней линии треугольника (по которому они должны быть параллельны).

2. Итак, противоречие получено, утверждение доказано: $BC \| AD$. При этом, т. к. $LK : KM = BC : AD = 1 : 3$ (следует из подобия треугольников BKC и DKA), то $AD \neq BC$, поэтому $ABCD$ — трапеция (а не параллелограмм).

3. Сделаем новый, уточнённый чертёж. Обозначим $BC = a$, $AD = 3a$. Условие, что в четырёхугольник можно вписать окружность означает: суммы длин его противоположных сторон равны (факт хорошо известный), т.е. $a + 3a = 2 + CD$, откуда $CD = 4a - 2$. Учитывая условие $BD = 2\sqrt{5}$, получаем классический вариант задачи на расчёт трапеций (четыре условия для этого заданы — перечислите их). Для её разрешения введём в треугольниках ABD и BCD общий связующий элемент $\angle CBD = \angle BDA = \alpha$ и запишем теорему косинусов в каждом из этих треугольников:



$$4 = 9a^2 + 20 - 2 \cdot 3a \cdot 2\sqrt{5}\cos\alpha, \quad (4a-2)^2 = a^2 + 20 - 2 \cdot a \cdot 2\sqrt{5}\cos\alpha.$$

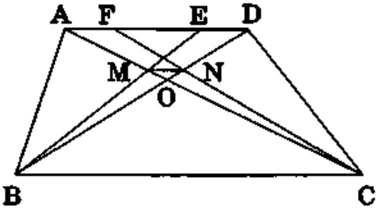
4. Выразив $\cos\alpha$ из второго уравнения и подставив его в первое, получим квадратное уравнение относительно a: $27a^2 - 24a - 16 = 0$, положительный корень которого $a = 4/3$.

5. В итоге, в ΔABD имеем три элемента: $AB = 2$, $AD = 4$ и $BD = 2\sqrt{5}$. Вычисляя косинус угла BAD, получим 0, т. е. $\angle BAD = 90°$ (это можно было получить быстрее, заметив, что $2^2 + 4^2 = (2\sqrt{5})^2$).

6. Из этого следует, что высота трапеции, равная по длине диаметру вписанной в неё окружности, равна $AB = 2$, а соответственно искомый радиус равен 1. **Ответ: 1.**

И в завершение ещё одна несложная задача, в которой умение исследователя «разглядеть» на одном рисунке сразу несколько трапеций, содержащих свои пары подобных треугольников, даёт серьёзное продвижение в её решении.

Задача 12 *(ГУУ, 1994)*. В трапеции $ABCD$ точки F и E делят основание AD в отношении $AF : FE : ED = 1 : 4 : 1$. Прямые BE и FC пересекают диагонали трапеции AC и BD в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если $BC = 60$, $AD = 24$.



Решение. Из условия следует, что $AF = ED = 4$, $EF = 16$.

Из подобия ΔAOD и ΔBOC получаем: $\frac{OD}{OB} = \frac{AO}{OC} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

Из подобия ΔFND и ΔBNC следует: $\frac{FN}{NC} = \frac{ND}{BN} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$, аналогично из подобия ΔAME и ΔBMC: $\frac{AM}{MC} = \frac{ME}{BM} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

Отсюда $ND = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4}(OB+OD) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}OD+OD\right) = \frac{7}{8}OD$ и $ON = \frac{1}{8}OD$. Аналогично $OM = \frac{1}{8}AO$.

Т. к. $\frac{ON}{OD} = \frac{OM}{AO} = \frac{1}{8}$, то ΔOMN и ΔOAD подобны, и поэтому $MN = \frac{1}{8}AD = 3$. **Ответ: 3.**

Рассмотрением этой задачи мы завершаем изучение свойств, характерных для четырёхугольников с двумя параллельными сторонами.

Задачи для самостоятельного решения

1 *(МГУ, химич. ф-т, 1995)*. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

2 *(МГУ, ф-т почв., 1977)*. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

3. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N. Найти MN, если основания трапеции равны a и b.

4. Найти расстояние между точками пересечения средней линии трапеции с диагоналями, если основания трапеции равны a и b.

5 *(МАТИ, 1995)*. В трапеции $ABCD$ точка E лежит на основании AD, а точка K — на основании BC, причём $AE : ED = 3 : 4$ и $BK : KC = 2 : 3$. Отрезок EK пересекает диагональ BD в точке N, а диагональ AC — в точке M, причём $BN : ND = 1 : 2$. Найти отношение $NM : EK$.

6 *(МГУ, биолог. ф-т, 1994)*. В трапеции $ABCD$ даны длины оснований $AD = 4$, $BC = 1$ и углы A и D при основании, равные соответственно $\operatorname{arctg}2$ и $\operatorname{arctg}3$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где E — точка пересечения диагоналей трапеции.

7 *(МГУ, филолог. ф-т, 2001)*. В трапеции $ABCD$ стороны AB, CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны точки P и Q так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найти отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

8 *(МГУ, биолог. ф-т, 1987)*. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2 \cdot CD = 3 \cdot RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника APQ, если $AD = 2 \cdot BC$.

9 *(МГУ, биолог. ф-т, 1991)*. Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найти площадь треугольника OEC.

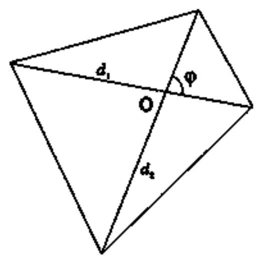
10 *(МГУ, эконом. ф-т, 1999)*. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найти площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

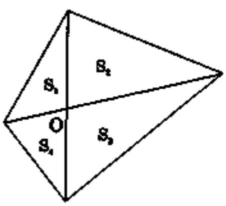
§ 2.4. ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

Изучая треугольники, мы много времени посвятили исследованию важнейшей характеристики любой геометрической фигуры — её площади. Мы видели, что площадь может выполнять «посреднические» функции, связывая различные элементы треугольника, отметили аддитивные свойства площади, позволяющие аккумулировать геометрическую информацию из нескольких треугольников, показали, как сравнение площадей треугольников помогает вычислить отношение длин их сторон и, тем самым, продвинуться в определении других пропорций сложных геометрических конструкций.

Дополним знания, полученные ранее, несколькими свойствами, характерными теперь уже для площади четырёхугольника. Эти свойства, как и многие другие характеристики четырёхугольника, являются прямыми следствиями из соответствующих формул и теорем для треугольников. Однако, в силу важности и распространённости в задачах планиметрии, их принято выделять в отдельные геометрические модули.

1. *Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:* $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$. (1)



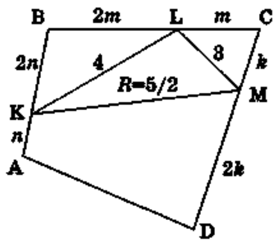


2. *Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на части так, что произведения площадей треугольников, прилегающих к противоположным сторонам четырёхугольника, равны:* $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. (2)

Для обоснования этих формул достаточно вычислить площадь каждого из четырёх треугольников, образованных при пересечении диагоналей четырёхугольника, через произведение длин их сторон и угол при их общей вершине O (O — точка пересечения диагоналей). Затем сложить эти площади (или перемножить, если доказывается свойство 2) и после несложных преобразований (полезно провести их самостоятельно, используя при этом знания из тригонометрии) убедиться в верности равенств.

Разберём для иллюстрации несколько задач.

Задача 1 *(МГУ, ф-т психологии, 1991)*. Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AK : BK = CL : BL = CM : DM = 1 : 2$. Радиус описанной около треугольника KLM окружности равен 5/2. Известно, что $KL = 4$, $LM = 3$ и $KM < KL$. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$.

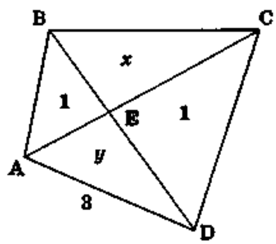


Решение. Прежде всего, обратим внимание на то, что точки K, L, M делят соответствующие стороны четырёхугольника в одинаковой пропорции. С похожей ситуацией мы уже встречались, когда, соединяя середины сторон выпуклого четырёхугольника, получали параллелограмм. То, что *равные пропорции могут приводить к образованию параллельных прямых*, — необходимо помнить.

В нашей задаче такими параллельными будут прямые $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$, что следует из подобия по второму признаку соответствующих пар треугольников $\Delta KBL \sim \Delta ABC$ ($k = 2/3$) и $\Delta LCM \sim \Delta BCD$ ($k = 1/3$). Из этого подобия сразу определяются длины диагоналей $AC = \frac{3}{2}KL = 6$ и $BD = 3LM = 9$. Угол между этими диагоналями, необходимый в формуле (1), будет равен углу между параллельными им прямыми KL и LM, т.е. углу KLM в полностью определенном ΔKLM (в нём заданы три элемента).

Итак, мы получили задачу на расчёт треугольника. Отметим, что угол KLM в этом треугольнике (обозначим его через φ) является острым, т.к. он опирается на не самую большую сторону ΔKLM, следовательно $\cos\varphi > 0$. Тогда, записав в этом треугольнике теоремы синусов ($KM = 2\cdot\frac{5}{2}\sin\varphi$) и косинусов ($KM^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos\varphi$), используя основное тригонометрическое тождество, получим уравнение относительно $y = \cos\varphi$: $25(1-y^2) = 25-24y$, решением которого будет $y=\dfrac{24}{25}$ ($y=0$ нас не устраивает). Тогда $\sin\varphi=\dfrac{7}{25}$ и искомая площадь равна $S=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 9\cdot\dfrac{7}{25}=\dfrac{189}{25}$. **Ответ:** 189/25.

Задача 2 *(МГУ, эконом. ф-т, 1985)*. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырёхугольника не превосходит 4, и $AD=3$. Найти сторону BC.



Решение. Обозначив через x и y площади треугольников BCE и AED, из условия задачи получим $x+y\le 2$. При этом, по свойству 2, $xy=1$. В результате неравенство приобретает вид $x+\dfrac{1}{x}\le 2$, что равносильно, с учетом $x>0$, равенству $x=1$ (обоснуйте самостоятельно), а следовательно, и $y=1$. В итоге, мы получили, что $ABCD$ своими диагоналями разделён на четыре равновеликих треугольника. Покажем, что такой четырёхугольник — параллелограмм (это, конечно, догадка, но она основана на знании различных свойств известных четырёхугольников).

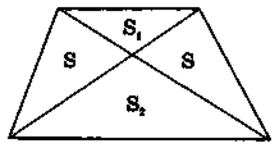
Действительно, т.к. $S_{ABE}=S_{CDE}$, треугольники ABD и ACD с общей частью AED имеют равные площади и одно основание, следовательно, их высоты, падающие на это основание равны, откуда $BC\parallel AD$. Аналогично показывается, что $AB\parallel CD$. В результате, $BC=AD=3$. **Ответ:** 3.

Рассмотренные свойства площадей четырёхугольников имеют интересные следствия.

1) *Середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади данного четырёхугольника.*

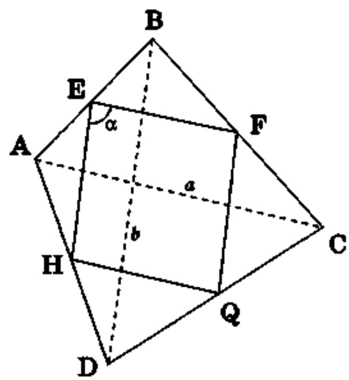
Первую часть этого утверждения мы уже доказывали, вторая следует из свойства 1 и формулы площади параллелограмма, выражающей её через длины его сторон и угол между ними.

2) *Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника так, что произведение площадей тех из них, которые прилежат к основаниям, равно квадрату площади треугольника, прилежащего к любой из боковых сторон трапеции:* $S_1S_2 = S^2$.



Понятно, что это прямое следствие свойства 2 и доказанных ранее свойств площадей четырёхугольников, имеющих параллельные стороны (образование равновеликих треугольников).

Задача 3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длины диагоналей AC и BD равны соответственно a и b. Точки E, F, Q, H являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и AD. Площадь четырёхугольника $EFQH$ равна S. Найти длины его диагоналей EQ и HF.

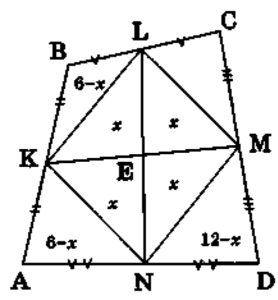


Решение. Четырёхугольник $EFQH$ является параллелограммом, длины сторон которого равны $a/2$ и $b/2$. Обозначим острый угол между ними через α, тогда, учитывая, что $S=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\sin\alpha$, получим $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{4S}{ab}\right)^2}$. Теперь меньшая диагональ параллелограмма (пусть для определённости это будет HF) может быть вычислена по теореме косинусов для ΔHEF: $HF^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-2\frac{ab}{4}\sqrt{1-\left(\frac{4S}{ab}\right)^2}$. Большая диагональ определяется по таким же формулам с отличием в знаке для $\cos\alpha$, т.к. треугольник EFQ, её определяющий, имеет две стороны, длины которых равны длинам сторон ΔHEF, а угол между ними будет $180°-\alpha$. В итоге, $EQ^2=\dfrac{a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2-16S^2}}{4}$.

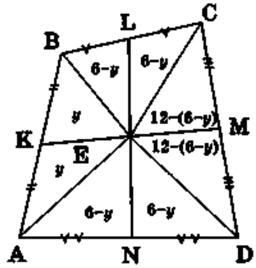
У этой задачи возможна и немного другая логика решения. Доказав сначала, что площадь $ABCD$ равна $2S$ (следствие 1), вычислим по формуле (1) угол между его диагоналями. Далее, учитывая, что этот угол равен углу между сторонами параллелограмма $EFQH$, длины сторон которого — $a/2$ и $b/2$, и снова используя теорему косинусов в треугольниках HEF и EFQ, получим искомые величины. **Ответ:** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2\pm2\sqrt{a^2b^2-16S^2}}}{2}$.

Задача 4 *(МГУ, географ. ф-т, 2004)*. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Отрезки KM и LN пересекаются в точке E. Площади четырёхугольников $AKEN$, $BKEL$ и $DNEM$ равны соответственно 6, 6 и 12. Найти: а) площадь четырёхугольника $CMEL$; б) отрезок CD, если $AB=1/2$.

Решение. На примере этой задачи покажем, что стереотипное мышление не всегда приводит к быстрым результатам.



Ведь действительно, не увидеть здесь параллелограмм $KLMN$ просто невозможно. А раз это так, то площади треугольников EKL, ELM, MEN и KEN равны между собой (обозначим их через x). На первый взгляд, это хорошее связующее соотношение. Ведь тогда $S_{KBL}=S_{AKN}=6-x$ (откуда, кстати, с учетом того, что $AK=KB$, следует: $LN \parallel AB$), а $S_{MND}=12-x$. На этом процесс решения начинает «пробуксовывать», т.к. перенести информацию о площадях в треугольник LCM быстро не удаётся. Чтобы это всё же осуществить, покажем, что $LN \parallel CD$. Это можно сделать, сравнив площади треугольников ABC и ABD, каждая из которых в четыре раза больше соответствующих (и при этом равных) площадей треугольников KBL и AKN. А раз площади этих треугольников с одинаковым основанием AB равны, то $CD \parallel AB$. Кроме того, $LN \parallel AB$, значит, $LN \parallel CD$. Отсюда, учитывая, что $CM = MD$, получим $S_{LCM} = 12 - x$ и, как следствие, $S_{CMEL} = 12$.



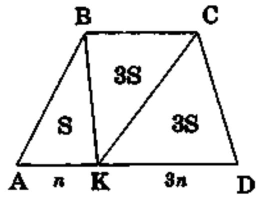
Тот же результат можно получить намного быстрее, если не идти по очевидной, на первый взгляд, «тропинке» в сторону известного геометрического шаблона — построения параллелограмма $KLMN$, а сделать другое построение, соединив точку E с вершинами четырёхугольника $ABCD$. Тогда, обозначив площадь треугольника KBE через y и приведя серию равенств площадей треугольников (обоснуйте самостоятельно каждое из них): $S_{BEL} = S_{LEC} = 6-y$, $S_{AKE} = S_{KBE} = y$, $S_{AEN} = S_{NED} = 6-y$, $S_{DEM} = S_{MEC} = 12-(6-y)$, в итоге получим $S_{CMEL} = (6-y)+12-(6-y) = 12$.

Однако для решения второй части задачи требуется обоснование того, что представленный в условии четырёхугольник $ABCD$ является трапецией. Этот вывод нами был фактически сделан при первом способе определения площади $CMEL$, второй же способ требует проведения дополнительного геометрического анализа (сделайте его самостоятельно с учётом уже полученных результатов), т.е. на самом деле не является намного более выигрышным.

Обозначим длину искомого большего основания нашей трапеции через z, тогда длина отрезка LN, который является средней линией этой трапеции, вычисляется по формуле $LN = \dfrac{z + \frac{1}{2}}{2}$. Учитывая, что LN делит $ABCD$ на две трапеции с равными высотами, отношение площадей которых нам известно, запишем это отношение в качестве замыкающего соотношения для z: $\dfrac{S_{ABLN}}{S_{NLCD}} = \dfrac{12}{24} =$
$$\frac{\frac{h}{2}(AB+LN)}{\frac{h}{2}(LN+CD)} = \frac{\frac{1}{2}+LN}{LN+z}.$$
Отсюда $LN = z - 1$ и, с учётом выписанной ранее формулы для LN, получим $z = \frac{5}{2}$. **Ответ: а) 12; б) 5/2.**

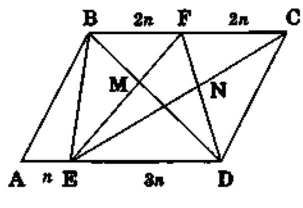
Рассмотрим теперь задачи, где площадь является главной информационной составляющей о структуре заданной в условии геометрической фигуры, а для вычисления искомых элементов необходимы знания, полученные ранее в различных разделах нашего пособия.

Задача 5. Точка K лежит на стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ и делит её в отношении $1:3$, считая от вершины A. Известно, что площади треугольников ABK, BKC и KCD состоят в пропорции $1:3:3$ соответственно. Определить, в каком отношении отрезок KC делит диагональ четырёхугольника BD.



Решение. Треугольники ABK и KCD имеют одинаковые высоты, опущенные на основания AK и KD соответственно (обоснуйте самостоятельно), точки A, K и D лежат на одной прямой, следовательно, $BC \parallel AD$. А уже из этого следует, что длины отрезков BC и KD равны (это также требует обоснования). В результате, $BCDK$ — параллелограмм (обоснуйте почему), диагонали которого точкой пересечения делятся пополам. **Ответ:** $1:1$.

Задача 6. В параллелограмме $ABCD$ точка F принадлежит стороне BC, точка E — стороне AD так, что справедливо отношение площадей треугольников $S_{ABE} : S_{BEF} : S_{EFD} = 1 : 2 : 3$. Определить площадь четырёхугольника $EMND$, где M — точка пересечения отрезков BD и EF, N — точка пересечения отрезков FD и EC, а площадь треугольника ABE равна 1.



Решение. 1) $S_{ABE} : S_{BEF} : S_{EFD} = 1 : 2 : 3$, $BC \parallel AD \Rightarrow AE : BF : ED = = 1 : 2 : 3$.

2) Пусть $AE = n$, тогда $BF = 2n$, $ED = 3n$, $BC = AD = 4n \Rightarrow FC = 2n$.

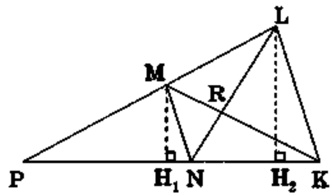
3) $\Delta BFM \sim \Delta DEM \Rightarrow FM : EM = = BF : ED = 2 : 3$.

3) $\Delta CFN \sim \Delta EDN \Rightarrow FN : ND = = FC : ED = 2 : 3$.

4) $FM : EM = FN : ND \Rightarrow \Delta MFN \sim \Delta EFD$ (угол общий, стороны пропорциональные, $k = 2/5$) $\Rightarrow S_{MFN} = \dfrac{4}{25} S_{EFD} \Rightarrow S_{EMND} = \dfrac{21}{25} S_{EFD} = = \dfrac{21 \cdot 3}{25} = \dfrac{63}{25}$ (здесь учтено, что $S_{ABE} : S_{EFD} = 1 : 3$). **Ответ:** $63/25$.

Задача 7 *(МГУ, химич. ф-т, 1996)*. Продолжения стороны LM за точку M и стороны KN за точку N выпуклого четырёхугольника $KLMN$ пересекаются в точке P, $KN = NP$. Площади треугольников KLN и KMN равны соответственно 2 и 1. Отрезки KM и LN пересекаются в точке R. Найти LR, если $RN = 1/2$.

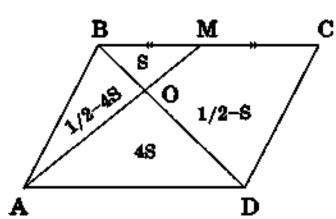
Решение. Покажем, что $PM = ML$. Для этого мысленно проведем высоты LH_2 и MH_1 в треугольниках KLN и KMN, имеющих общее основание KN. Так как площади этих треугольников относятся как 2:1, то в таком же отношении находятся и соответствующие высоты. Однако эти высоты являются катетами в подобных прямоугольных треугольниках PLH_2 и PMH_1, соответствующими общему углу LPK. Из этого следует $PL : PM = 2 : 1$.



В итоге MN оказывается средней линией в треугольнике PLK, а значит, $MN \parallel LK$. Но, как мы уже знаем, параллельные прямые, пересеченные двумя другими, всегда «создают» подобные треугольники. В нашем случае $\Delta NMR \sim \Delta LKR$ (по двум углам), а потому $LR : RN = LK : MN = 2 : 1$. Отсюда, учитывая, что $RN = 1/2$, получаем $LR = 1$. **Ответ:** 1.

Задача 8 *(МГУ, биологич. ф-т, 1973)*. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найти площадь четырёхугольника $OMCD$.

Решение. 1) $\Delta BOM \sim \Delta DOA$ $(k = 1/2)$. Следовательно, если площадь ΔBOM обозначить через S, то площадь ΔDOA будет равна $4S$.



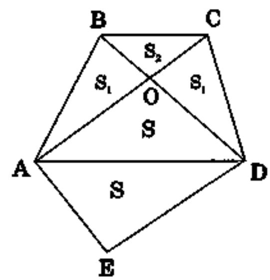
2) Диагональ BD делит параллелограмм на два треугольника, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}$. Поэтому

$S_{ABO} = \frac{1}{2} - 4S$, $S_{OMCD} = \frac{1}{2} - S$.

3) Треугольники ABO и AOD имеют общую высоту, исходящую из вершины A. Из этого следует, что $\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}}=\frac{BO}{OD}=\frac{1}{2}$ (последнее равенство вытекает из пункта 1). Это и будет замыкающим соотношением для определения величины S. Несложные арифметические действия дают $S=1/12$. Откуда $S_{OMCD}=\frac{5}{12}$. **Ответ:** 5/12.

И в заключение красивая сложная задача, решение которой требует твёрдых знаний свойств четырёхугольников с параллельными сторонами.

> **Задача 9** *(МГУ, химич. ф-т, 2001, олимпиада).* Пятиугольник $ABCDE$ обладает тем свойством, что $S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{DEA}=S_{EAB}=S$. Найти площадь этого пятиугольника. (Имейте в виду, что он не обязательно правильный!)



Решение. 1) $S_{ABC}=S_{BCD}\Rightarrow BC \parallel AD$ (основание BC — общее, высоты равны) $\Rightarrow$ $ABCD$ — трапеция (точку пересечения диагоналей которой обозначим через O).

2) Аналогично $S_{CDE}=S_{DEA}$, $S_{DEA}=S_{EAB}\Rightarrow$ $AC \parallel ED$, $BD \parallel AE \Rightarrow AODE$ — параллелограмм.

3) $S_{AOD}=S_{DEA}=S$ (AD — диагональ параллелограмма).

4) Обозначим $S_{ABO}=S_{COD}=S_1$ (т.к. $BC \parallel AD$), $S_{BOC}=S_2$. Тогда $S_1+S_2=S_{ABC}=S$ (по условию), $S_1^2=S\cdot S_2$ (свойство трапеции $ABCD$).

Итак, для неизвестных S_1 и S_2 получены два замыкающих соотношения, одно из которых является линейным. Такая система алгебраических уравнений вполне разрешима. Выразив, например, из первого уравнения S_2 через S_1 и подставив его во второе, получим квадратное уравнение относительно S_1 : $S_1^2+S\cdot S_1-S^2=0$, положительный корень которого равен $S_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}S$.

Осталось искомую площадь выразить через полученные площади треугольников: $S_{ABCDE}=S_{ABC}+S_{AOD}+S_{ADE}+S_{COD}=3S+S_1=$ $=\frac{5+\sqrt{5}}{2}S$. **Ответ:** $\frac{5+\sqrt{5}}{2}S$.

Интересно отметить, что правильный пятиугольник обладает всеми свойствами пятиугольника $ABCDE$, а потому является его частным случаем. Можно провести расчёт и выразить площадь правильного пятиугольника через площадь его части — треугольника ADE (обозначив её через S). И хотя задача эта сама по себе достаточно непростая, результат её решения будет тем же самым, что служит хорошей проверкой правильности нашего решения. Именно проверкой, так как анализ частного случая никогда полноценным решением не является, и в условии задачи об этом сделано специальное предупреждение.

Задачи для самостоятельного решения

1. Точки M и K являются соответственно серединами сторон AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Найти его площадь, если площадь четырёхугольника $AMCK$ равна 6.

2. В выпуклом четырёхугольнике, площадь которого равна 12, проведены диагонали, разбивающие, четырёхугольник на треугольники. Площади двух треугольников, прилежащих к противоположным сторонам, равны 1 и 6. Найти площади двух других треугольников.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, площадь которого равна 2, точки M и F — середины сторон AD и CD соответственно. На сторонах AB и BC расположены точки N и E так, что отрезки NF и EM, пересекаясь, делятся пополам. Найти площадь четырёхугольника $EFMN$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ на сторонах AB, CD и AD взяты соответственно точки M, N и E так, что $AE : ED = CN : ND = 1 : 2$, а площади треугольников AME, BME, BCE и END состоят в пропорции $1 : 2 : 3 : 4$ соответственно. Найти отношение $BC : AD$.

5. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найти MN, если $BD = d$.

6. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен $120°$. Точки E и F лежат на сторонах BC и AD соответственно, отрезок BF и диагональ ромба AC пересекаются в точке M. Площади четырёхугольников $BEFA$ и $ECDF$ относятся как $1:2$. Найти EM, если $AM : MC = 1:3$.

7 *(МГУ, географ. ф-т, 1998)*. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) равна 48, а площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найти отношение оснований трапеции $AD : BC$.

8 *(МГУ, географ. ф-т, 1990)*. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M и L таким образом, что $AK : KB = 2:1$, $BM : MC = 1:1$, $AL : LD = 1:3$. Найти отношение площадей треугольников KBL и BML.

9. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника, равны 2 и 6.

10 *(МГУ, географ. ф-т, 1991)*. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E так, что длина AE составляет треть длины AC, а на стороне AD взята точка F так, что AF составляет четверть длины AD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырёхугольника $ABGE$ (где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC) равна 8.

11. В трапеции $ABCD$ даны основания: $AD = 12$ и $BC = 3$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого составляет три четверти площади трапеции. Найти CM.

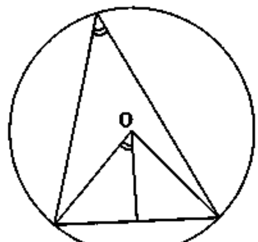
ГЛАВА 3. ОКРУЖНОСТИ

Перейдём теперь к подробному исследованию свойств третьего важнейшего геометрического объекта — окружности — объекта, появление которого в планиметрической задаче приводит к реализации специфических, присущих только ему закономерностей. Научиться видеть и успешно использовать в процессе решения задач эти закономерности и свойства окружностей — одна из основных целей читателя при изучении данной главы.

§ 3.1. СПЕЦИФИКА ЗАДАЧ НА ОКРУЖНОСТИ

Напомним читателю некоторые факты из теории, без использования которых не обходится решение практически ни одной планиметрической задачи.

Теорема о вписанном угле. *Вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.*



У этой теоремы есть и другая формулировка.

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Часто в задачах используется не только сама эта теорема, но и следствия из неё:

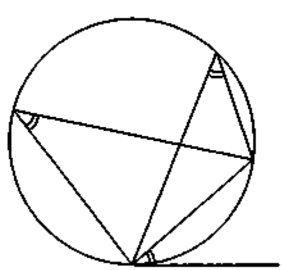
Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

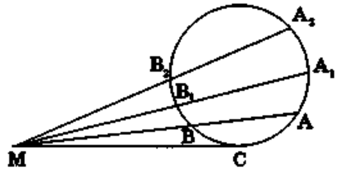
Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

Теорема об угле между хордой и касательной. *Угол, образованный касательной и хордой, проведёнными из одной точки окружности, измеряется половиной длины дуги, заключённой внутри него.*

У этой теоремы также есть очень удобное следствие:

Угол между касательной и хордой, проведёнными из одной точки окружности, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу окружности, заключённую между касательной и хордой.

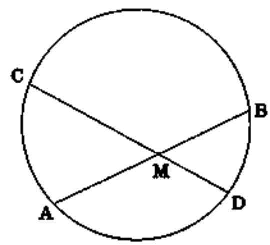




Теорема о касательной и секущей. *Если из точки M, лежащей вне окружности, проведены к ней касательная MC и секущая MA, то произведение длины секущей на длину её внешней части MB равно квадрату длины касательной:* $MA \cdot MB = MC^2$.

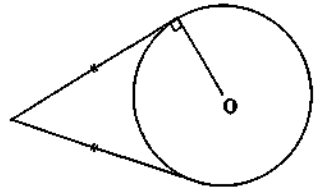
И опять при решении задач часто бывает удобно использовать следствие из этой теоремы:

Произведение отрезков секущих, проведенных из одной и той же точки вне окружности, есть число постоянное для всех секущих: $MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = MA \cdot MB$.



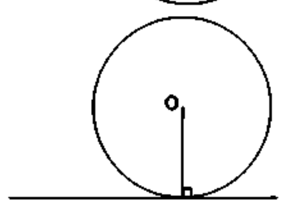
Теорема о хордах. *Если через точку M, взятую внутри круга, проведены две хорды AB и CD, то произведения длин отрезков каждой хорды, на которые её делит точка M, равны между собой:* $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Ещё несколько полезных утверждений:

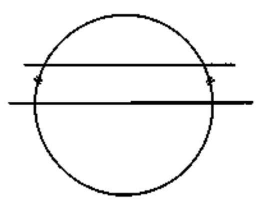


1. *Отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, имеют равные длины.*

2. *Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.*

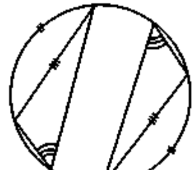


3. *Если прямая, пересекающая окружность, перпендикулярна радиусу, проведённому в точку пересечения, то она является касательной к этой окружности.*

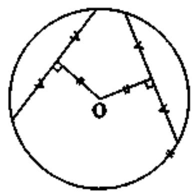


4. *Дуги окружности, заключённые внутри параллельных прямых, пересекающих эту окружность, равны.*

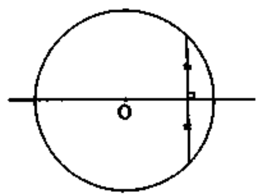
5. *Равные хорды стягивают равные дуги окружности (при этом считается, что хорда стягивает меньшую из двух дуг окружности). Равные вписанные в окружность углы опираются на равные хорды.*



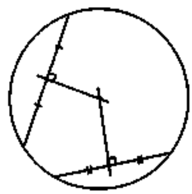
6. *Равные хорды окружности равноудалены от её центра. Равноудалённые от центра окружности хорды равны.*



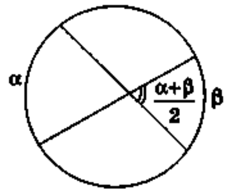
7. *Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.*



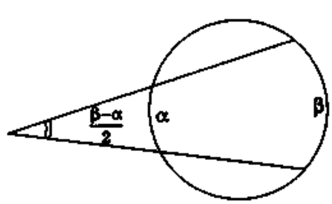
8. *Центр окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к любым двум различным непараллельным хордам этой окружности.*



9. *Угол, образованный двумя пересекающимися хордами, измеряется полусуммой дуг окружности, одна из которых заключена внутри него, а другая — внутри вертикального с ним угла.*



10. *Угол, образованный двумя пересекающимися секущими, измеряется полуразностью дуг окружности, заключённых внутри него.*



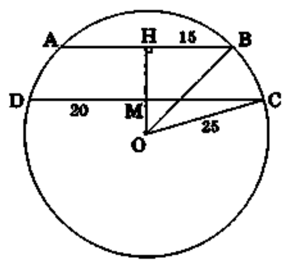
Доказательство этих основополагающих свойств окружности можно найти в школьных учебниках или пособиях по геометрии (список см. на стр. 230–235). Все они представляют из себя небольшие и часто очень красивые модельные задачи, решение которых, безусловно, полезно провести самостоятельно.

А теперь давайте посмотрим, как «работают» эти свойства в задачах различной степени сложности.

Начнём с модельных примеров.

Пример 1. В окружности, радиус которой равен 25, проведены по одну сторону от её центра две параллельные хорды длиной 40 и 30. Найти расстояние между этими хордами.

Решение. Если через центр O окружности провести к заданным хордам общий перпендикуляр, то образуются два прямоугольных треугольника OBH и OCM с гипотенузами, равными радиусу. При этом один из катетов каждого треугольника равен половине длины соответствующей хорды окружности (обоснуйте самостоятельно). Если найти по теореме Пифагора длины вторых катетов, то останется только определить их разность: $MH = OH - OM = 20 - 15 = 5$. **Ответ: 5.**



Пример 2. Вписанная окружность касается гипотенузы прямоугольного треугольника в точке, делящей гипотенузу на отрезки 2 и 3. Найти радиус этой окружности.

Решение. Соединив центр O окружности с точками касания H, M, P и обозначив через r искомый радиус,

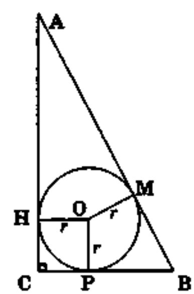
получим:

1) $AH = AM = 3$, $BP = BM = 2$;

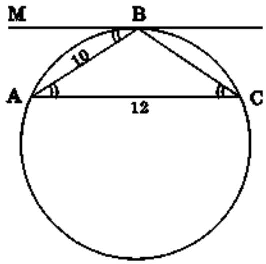
2) $CHOP$ — квадрат со стороной r (оба пункта обоснуйте самостоятельно).

Замыкающим соотношением для определения r служит теорема Пифагора для $\Delta\ ABC$: $(r+2)^2 + (r+3)^2 = 5^2$. Это квадратное уравнение имеет только один положительный корень $r = 1$.

Ответ: 1.

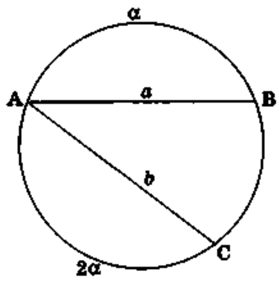


Пример 3. Хорда окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.

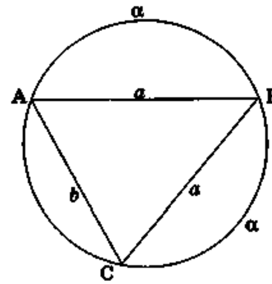


Решение. В задаче обсуждается достаточно распространённая геометрическая «картинка». Обозначив через MB касательную, а через AC параллельную ей секущую, покажем, что $AB = BC$. Действительно, $\angle MBA = \angle BAC$ (как накрест лежащие), $\angle MBA = \angle BCA = \alpha$ (т. к. каждый из них равен половине длины дуги AB), следовательно ΔABC — равнобедренный. Но тогда $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = 4/5$, а искомый радиус легко определить по теореме синусов для ΔABC: $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = 2R$. Откуда $R = 25/4$. **Ответ:** $25/4$.

Пример 4. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найти радиус окружности.



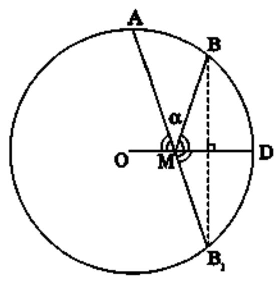
Решение. Следует обратить внимание на то, что в окружности радиус часто играет роль общего связующего элемента, выражая через который различные геометрические компоненты этой окружности, можно получить интересные соотношения между их величинами. Так, в нашем примере, обозначив через α длину дуги AB и выразив длину каждой из заданных в условии хорд через диаметр окружности, получим соотношение: $\dfrac{a}{\sin\alpha/2} = 2R = \dfrac{b}{\sin\alpha}$ (здесь учтено, что величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается). Отсюда сразу же выписывается выражение для $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b}{2a}$, после чего легко получить $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2}}$ (учитываем, что $\frac{\alpha}{2}<\pi$). Дальнейшее определение радиуса окружности является делом техники.



Обязательно надо отметить, что наши рассуждения не зависели от того, является ли дуга AB частью дуги AC (тогда легко заметить, что дуга BC тоже равна α — *см. соседний рисунок*) или это различные дуги одной окружности (этому случаю соответствует тот рисунок, который мы изобразили вначале). Умение видеть в геометрической задаче разные «случаи» очень важно!

Ответ: $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

Пример 5. На дуге окружности, лежащей по одну сторону от прямой OD, проходящей через центр O выбраны точки A и B так, что $\angle AMO = \angle BMD$, где M — точка, принадлежащая радиусу OD. Определить величину угла AOB, если $\angle AMB=\alpha$.

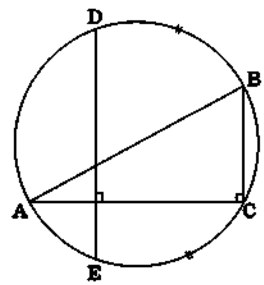


Решение. Если провести перпендикуляр BB_1 к радиусу OD (распространённое дополнительное построение в таких задачах), то при пересечении его с окружностью образуется точка B_1, симметричная B относительно этого радиуса (что является прямым следствием равнобедренности ΔOBB_1). Поэтому ΔMBB_1 тоже равнобедренный и $\angle B_1MD=\angle BMD$. Если при этом учесть, что $\angle AMO = \angle BMD$, получается, что точки A, M и B_1 лежат на одной прямой. Поэтому величина угла MB_1B равна $\alpha/2$ (т. к. внешний угол α в равнобедренном ΔMBB_1 равен сумме двух равных внутренних, не смежных с ним). А так как угол AB_1B является вписанным, опирающимся на дугу AB окружности, то величина этой дуги (а вместе с ней и величина угла AOB) будет равна α.

Отметим также, что точку B_1 можно было получить и по-другому: как результат пересечения прямой AM с окружностью. Тогда углы AMO и DMB_1 будут равны как вертикальные, а значит, MD будет биссектрисой угла BMB_1. В итоге, точка B_1 есть результат пересечения двух линий — нижней полуокружности и луча MB_1, каждая из которых симметрична относительно OD соответственно верхней полуокружности и лучу MB, которые пересекаются в точке B. Следовательно, B и B_1 симметричны относительно OD. При таком варианте рассуждений мы использовали симметрию окружности относительно любого из её диаметров.

Ответ: α.

Пример 6. Из точки A окружности проведен диаметр AB и хорда AC. Кроме того, перпендикулярно хорде, пересекая диаметр, проведена другая хорда DE. Доказать, что длина отрезка DB равна длине отрезка EC, а длина отрезка DC равна длине отрезка EB.



Решение. Доказательство этого факта проведём только для случая, когда точки D и C, заданные в условии задачи, расположены на окружности с разных сторон от её диаметра AB. Случай, когда они находятся с одной стороны от AB, для закрепления навыка работы с окружностями полезно рассмотреть самостоятельно.

Итак, $\angle ACB$ — вписанный, опирающийся на диаметр, а значит, прямой, т.е. $BC \perp AC$. Кроме того, по условию $DE \perp AC$, а потому $DE \parallel BC$. Следовательно, дуги DB и EC равны, а значит, равны и стягивающие их хорды.

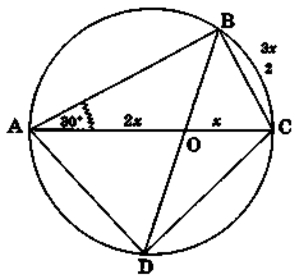
Для обоснования равенства отрезков DC и BE сравним длины дуг DBC и BCE, которые этими хордами стягиваются. Дуги эти имеют общую часть — BC, а оставшиеся части DB и EC по доказанному ранее равны. То есть дуги DBC и BCE также равны.

Утверждение доказано.

Это доказательство могло бы быть несколько короче, если знать, что вписанная в окружность трапеция (а $DBCE$ — трапеция, т.к. $DE \parallel BC$) всегда является равнобедренной, а поэтому равны как её боковые стороны, так и диагонали. Однако мы сознательно не пошли по этому пути, желая показать, как иногда удобно для обоснования равенства длин хорд одной окружности использовать сравнение длин дуг, стягивающих эти хорды.

Разбирая эти примеры, мы познакомились с использованием при их решении далеко не всех из приведённых выше свойств окружности. Продолжим это знакомство, перейдя к решению более сложных задач.

Задача 1 (*МГУ, социологич. ф-т, 2001*). Диагональ AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найти отношение S_{ABC} и S_{ACD}, если известно, что диагональ BD делит AC в отношении $2:1$ (считая от точки A), а $\angle BAC = 30°$.



Решение. Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника буквой O и попробуем начать решение задачи от цели, используя метод сравнения площадей треугольников.

1) $OC : AC = 1 : 3 \Rightarrow S_{OBC} : S_{ABC} = 1:3$, $S_{OCD} : S_{ACD} = 1:3$ (две пары треугольников с общими высотами). Следовательно, искомое отношение площадей треугольников ABC и ACD равно отношению площадей треугольников BOC и DOC, также имеющих общую высоту, опущенную из вершины C, а потому $\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{BO}{OD}$.

Найдём отношение $BO : OD$.

2) AC — диаметр окружности $\Rightarrow \angle ABC = 90°$. Обозначив через x длину отрезка OC, получим из условия задачи $AO = 2x$, а $BC = 3x/2$ (катет, лежащий напротив угла в $30°$).

3) В ΔBOC: $\angle BCO = 60°$, а потому $BO^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2x \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (теорема косинусов). Таким образом, $BO = x\sqrt{7}/2$.

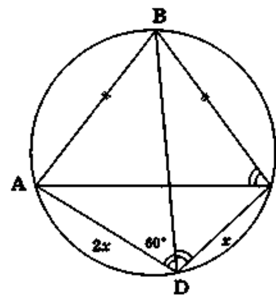
4) По теореме о хордах: $BO \cdot OD = AO \cdot OC$, откуда $OD = 4x/\sqrt{7}$.

Итак, через переменную x выражены длины обоих отрезков BO и OD, а значит, их отношение легко находится: оно равно $7/8$.

Ответ: $7/8$.

Задача 2 (*МГУ, ф-т психологии, 1983*). В окружность радиуса 7 вписан четырёхугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как 2 : 1. Величина угла ADC равна 120°. Найти длины всех сторон четырёхугольника $ABCD$.

Решение. 1) DB — биссектриса угла ADC (т.к. дуги AB и BC, стягиваемые соответствующими им равными хордами, также равны, а значит, равны и вписанные углы ADB и BDC, опирающиеся на эти дуги).



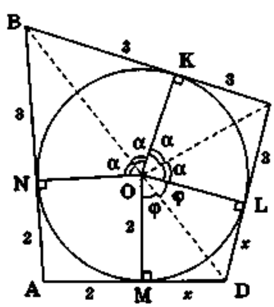
2) $S_{ABD}:S_{BCD}=2{:}1 \Rightarrow AD:DC=2:1$ (обоснуйте самостоятельно). Обозначив через x длину стороны DC, получим $AD = 2x$. Тогда длина стороны AC, вычисленная по теореме косинусов в ΔACD, будет равна $AC=x\sqrt{7}$ (получите самостоятельно).

3) $\angle ACB=\angle ADB=60°$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу), $AB = BC$, поэтому ΔABC — правильный $\Rightarrow AB=BC=x\sqrt{7}$.

4) Для определения x воспользуемся теоремой синусов в ΔABC: $\dfrac{AB}{\sin 60°}=2R$. Учитывая, что по условию $R = 7$, получим $AB=7\sqrt{3}$, откуда $DC=x=\sqrt{21}$, $AD=2\sqrt{21}$. **Ответ:** $7\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$, $\sqrt{21}$, $2\sqrt{21}$.

Задача 3 (*МГУ, социологич. ф-т, 2000*). В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 2. Угол DAB прямой. Сторона AB равна 5, сторона BC равна 6. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$.

Решение. Опустим из центра O вписанной в четырёхугольник окружности перпендикуляры к его сторонам AB, BC, CD и DA. Полученные точки касания окружности и четырёхугольника обозначим соответственно — N, K, L и M. В четырёхугольнике $ANOM$ все углы прямые, а стороны NO и OM равны между собой (и равны радиусу вписанной в $ABCD$ окружности), поэтому $ANOM$ — квадрат со стороной 2. Но тогда



$BN = 5 - 2 = 3$ и отрезок BK другой касательной к этой окружности, проведённый из точки B, также равен 3. Аналогично: $CK = CL = 6 - 3 = 3$.

Единственной неизвестной парой равных отрезков остались $LD = MD$ (обозначим их через x). Понятно, что найдя x, мы решим поставленную задачу. Обратите внимание, что наши действия до настоящего момента практически совпадают с действиями, проводимыми нами при решении примера 2.

Для определения x отметим сначала, что треугольники NOB, BOK, KOC и COL равны между собой (как прямоугольные с равными катетами). Обозначим угол при общей вершине O у этих треугольников через α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = 3/2$. По тем же причинам равны между собой и треугольники LOD и MOD. Поэтому, если обозначить через φ угол при вершине O у этих треугольников, то $\operatorname{tg}\varphi = x/2$. Но φ и α связаны между собой следующим соотношением: $90^\circ + 4\alpha + 2\varphi = 360^\circ$.

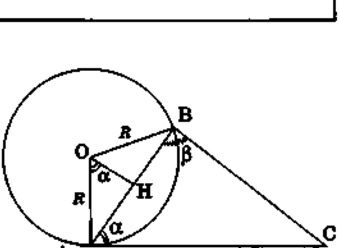
Далее следуют несложные, но достаточно «неприятные» тригонометрические выкладки: $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(135^\circ - 2\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}135^\circ - \operatorname{tg}2\alpha}{1 + \operatorname{tg}135^\circ \operatorname{tg}2\alpha}$.

Ввиду того, что $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\dfrac{12}{5}$, получаем $x = 2\operatorname{tg}\varphi = 2\cdot\dfrac{7}{17} = \dfrac{14}{17}$.

Осталось записать искомую площадь в виде суммы площадей отдельных треугольников и квадрата: $S_{ABCD} = S_{ANOM} + 4S_{NBO} + 2S_{LOD} = 4 + 4\cdot 3 + 2\cdot x = \dfrac{300}{17}$. **Ответ:** $\dfrac{300}{17}$.

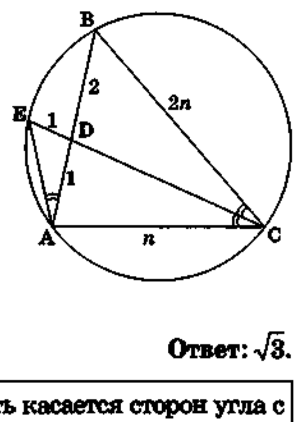
> **Задача 4** (*МГУ, географич. ф-т, 1972*). Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти площадь треугольника ABC, зная, что $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$.

Решение. Следует отметить, что если в задаче присутствуют хорда и касательная, исходящие из одной точки окружности, то необходимо сразу же заняться поиском угла, равного углу между ними. Как правило, это даёт серьёзное продвижение в решении. Так, обозначив через



O центр заданной окружности, а через H — основание высоты в равнобедренном треугольнике AOB, мы получим равенство углов BAC и AOH (угол AOH равен половине центрального угла AOB, а значит, его величина равна половине длины дуги AB, чему также равна величина угла BAC). Но тогда из ΔAOH: $AH = R\sin\alpha$. Учитывая, что $AB = 2\cdot AH$, получаем полностью определённый ΔABC (в нём известны три элемента — сторона и два прилежащих к ней угла), из которого с помощью техники, отработанной в главе 1, несложно получить искомую площадь (проведите эти выкладки самостоятельно). **Ответ:** $2R^2\sin^3\alpha\sin\beta \big/ \sin(\alpha+\beta)$.

Задача 5 (*ИСАА МГУ, 1995*). Сторона AB треугольника ABC равна 3, $BC = 2AC$, E — точка пересечения продолжения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $DE = 1$. Найти длину AC.



Решение. 1) $BD:AD = BC:AC = 2:1$ (по теореме о биссектрисе) $\Rightarrow BD = 2, AD = 1$;

2) $BD\cdot AD = ED\cdot DC$ (по теореме о хордах) $\Rightarrow DC = 2$;

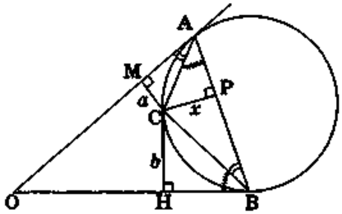
3) $\angle EAB = \angle ECB$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу);

4) $\Delta ECA \sim \Delta EAD$ (по двум углам — очень распространённая геометрическая «картинка»!) $\Rightarrow$ $\frac{AC}{1} = \frac{3}{AE} = \frac{AE}{1}$. Откуда $AC = AE = \sqrt{3}$. **Ответ:** $\sqrt{3}$.

Задача 6 (*МГУ, физич. ф-т, 1993*). Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найдите расстояние от точки C до хорды AB.

Решение. Прежде всего, сделаем достаточно естественные дополнительные построения: опустим перпендикуляры из точки C на стороны ΔAOB, тем самым зафиксировав в виде отрезков $CM = a$, $CH = b$ и $CP = x$ — заданные и искомое расстояния. Кроме того, соединим точку C с точками касания A и B, создав при этом углы между хордами AC и BC и соответствующими им касательными OA и

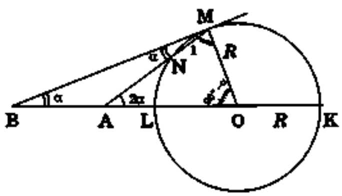
OB. После этого несложно найти равные им углы $\angle CBA = \angle CAO$ и $\angle CAB = \angle CBO$ и, как следствие, заметить две пары подобных прямоугольных треугольников: $\Delta MAC \sim \Delta PBC$, и $\Delta HBC \sim \Delta PAC$. Из этого подобия образуются отношения $\frac{a}{x} = \frac{AC}{BC}$ и $\frac{b}{x} = \frac{BC}{AC}$, откуда сразу следует: $x = \sqrt{ab}$.



Ответ: $\sqrt{ab}$.

Задача 7 (*МГУ, географич. ф-т, 2004, репетиц. экз.*). Из точки B к окружности с центром O проведена касательная. Прямая, проходящая через точку касания M, пересекает окружность также в точке N, и отрезок OB — в точке A вне окружности. Найти радиус окружности, если $OB = 8$, $MN = 1$, а угол MAO равен удвоенному углу MBO.

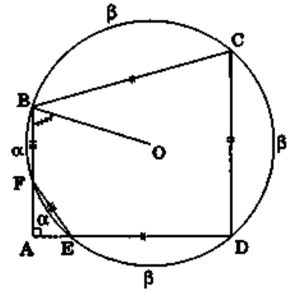
Решение. Обозначим $\angle MBA = \alpha$, тогда $\angle MAO = 2\alpha$ (по условию), а $\angle BMA = \alpha$ (т.к. внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним). Следовательно, ΔBAM — равнобедренный ($BA = AM$).



Кроме того, так как M — точка касания, то проведя к ней радиус OM, получим прямоугольный треугольник BOM и через α теперь можно выразить ещё два угла: $\angle BOM = 90° - \alpha$ и $\angle AMO = 90° - \alpha$, т.е. ΔMAO также оказался равнобедренным ($AM = AO$).

Теперь несложно получить числовые выражения длин отрезков: $BA = AM = AO = 4$, $AN = 3$. Для определения искомого радиуса R воспользуемся следствием из теоремы о касательной и секущей: $AM \cdot AN = AL \cdot AK$ (здесь L и K — точки пересечения прямой BO с окружностью). В итоге: $4 \cdot 3 = (4 - R)(4 + R)$, откуда $R = 2$. **Ответ:** 2.

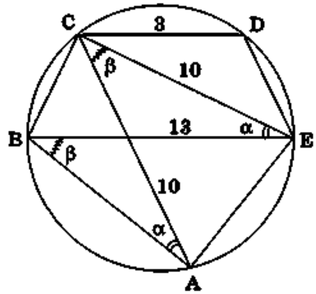
Задача 8 (*МГУ, биологич. ф-т, 1995*). Вершины B, C, D четырёхугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке F, а сторону AD — в точке E. Известно, что угол BAD прямой, длина хорды EF равна длине хорды FB и длины хорд BC, CD, ED равны между собой. Найти угол ABO.



Решение. Обозначим через α и β длины дуг, стягиваемых равными хордами: $FB=FE=\alpha$ и $BC=CD=DE=\beta$. Тогда искомый угол будет определяться из равнобедренного ΔBOF выражением $\frac{\pi-\alpha}{2}$.

Заметим, что через α и β легко выразить длину всей окружности: $2\pi=2\alpha+3\beta$. Для нахождения второго соотношения между α и β можно выразить $\angle BAD$ — угол, образованный двумя пересекающимися секущими AD и AB, — через полуразность дуг окружности BD и FE, на которые он опирается: $\frac{\pi}{2}=\frac{2\beta-\alpha}{2}$. Решив систему из двух линейных уравнений, получим $\alpha=\frac{\pi}{7}$, $\beta=\frac{4\pi}{7}$, а $\angle ABO=\frac{3\pi}{7}$. **Ответ:** $\frac{3\pi}{7}$.

> **Задача 9** (*МГУ, ф-т психологии, 2001*). В трапеции $BCDE$ основание $BE=13$, основание $CD=3$, $CE=10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $CA=10$. Найти длину отрезка BA и площадь пятиугольника $ABCDE$.



Решение. Покажем сначала, что точка A расположена на дуге BE окружности. Действительно, так как по условию $\angle CBE$ — острый, то дуга CDE меньше полуокружности, а значит, точка A не может ей принадлежать, ибо $CA=CE$. Кроме того, т.к. длина дуги CB равна длине дуги DE (в силу параллельности CD и BE), а DE лишь часть дуги CDE, значит, хорда CB меньше 10 и точка A также не может принадлежать дуге CB. Если теперь заметить, что равные хорды CA и CE стягивают дуги, части CB и DE у которых равны, окажется, что части BA и CD также равны. А раз равны дуги, равны и стягивающие их хорды, т.е. $AB=CD=3$.

Площадь пятиугольника $ABCDE$ будем искать как сумму площадей треугольников ABC, CDE и ACE. В каждом из этих треугольников известно по две стороны, и для определения площади необходимо найти ещё угол между соответствующими сторонами.

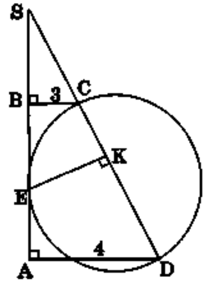
Здесь мы имеем дело с одним из стандартных геометрических модулей, когда два треугольника с известными сторонами, например, BCA и BCE или ABE и ACE, имеют общую сторону (BC или AE) и равные углы, противолежащие этой стороне. Эти углы легко определить, выразив дважды из теоремы косинусов квадрат общей стороны в каждом из треугольников: $BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2\cdot BE\cdot CE\cdot\cos\alpha = BA^2 + AC^2 - 2\cdot BA\cdot AC\cdot\cos\alpha$ (здесь $\alpha = \angle BAC = \angle BEC$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу). BC^2 в этом двойном равенстве выполняет лишь «посредническую» функцию и для расчетов не нужен. Подставив числовые значения, получим сразу же: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{CDE} = \frac{1}{2}CE\cdot CD\cdot\sin\alpha = 9$. Легко понять, что треугольники ABC и CDE равны, поэтому $S_{ABC} = 9$.

Проведите самостоятельно аналогичные выкладки для определения угла $\beta = \angle ABE = \angle ACE$. В результате получится $\cos\beta = \frac{11}{61}$; $\sin\beta = \frac{60}{61}$; $S_{ACE} = \frac{3000}{61}$. Поэтому $S_{ABCDE} = 9 + 9 + \frac{3000}{61} = \frac{4098}{61}$.

Ответ: $3; \frac{4098}{61}$.

Задача 10 (*МГУ, филологич. ф-т, 1991*). В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найти расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 4$, а $BC = 3$.

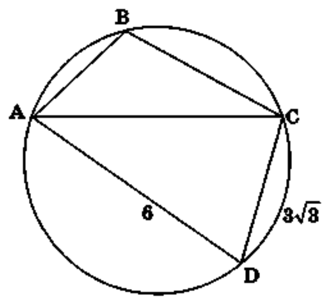
Решение. В главе 2 мы отмечали, что если в трапеции заданы длины оснований или хотя бы их отношения, то часто бывает удобно достроить эту трапецию до треугольника, продолжив до пересечения её боковые стороны. Так и сделаем, обозначив через S вершину этого треугольника. При этом происходит образование подобных треугольников SBC и SAD, у которых $SC : SD = 3 : 4$. Обозначим $SC = 3m$, тогда $SD = 4m$.



При таком дополнительном построении SE и SD становятся соответственно касательной и секущей, проведёнными из одной точки S к окружности, а потому $SE^2 = SD \cdot SC = 12m^2 \Rightarrow SE = 2m\sqrt{3}$.

Заметим, что искомое расстояние EK, где K — основание перпендикуляра, проведённого из точки E к прямой CD, является одним из элементов в другой паре подобных прямоугольных треугольников SBC и SKE с общим углом при вершине S. Поэтому $\frac{EK}{3} = \frac{2m\sqrt{3}}{3m}$. Откуда $EK = 2\sqrt{3}$. Ответ: $2\sqrt{3}$.

Задача 11 (*МГУ, социологич. ф-т, 1998*). В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 6, длина стороны CD равна $3\sqrt{3}$, косинус угла ADC равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, синус угла BCA равен $\frac{1}{4}$. Найти сторону BC, если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC, проходит также и через точку D.



Решение. Треугольник ACD является полностью определённым. В нём известны три элемента, а потому несложно вычислить длину стороны $AC = 3$ и радиус описанной окружности $R = 3$ (проведите эти выкладки самостоятельно). После этого треугольник ABC также становится полностью определённым — в нём теперь тоже известны три элемента: AC, R и $\sin\angle BCA$. Для определения длины BC (обозначим её через x) можно сначала по теореме синусов получить $AB = 2R\sin\angle BCA = 3/2$, а затем выписать теорему косинусов $x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3^2$. Здесь учтено, что $\cos\angle ABC = -\cos\angle ADC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (сумма величин этих углов равна 180°, т.к. дуги, на которые они опираются, в сумме образуют окружность). Единственный положительный корень этого уравнения равен $BC = x = \frac{3(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{4}$.

Отметим, что BC можно было бы получить и по-другому, предварительно вычислив $\sin\angle BAC = \sin(\angle ABC + \angle BCA)$. При этом способе решения будет чуть больше тригонометрических выкладок (потребуется применить формулу синуса суммы двух аргументов). Зато итоговый результат $BC = 2R\sin\angle BAC$ (он следует из теоремы синусов) получается быстрее (полезно провести это сравнение). **Ответ:** $\frac{3(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{4}$.

При решении этой задачи, также как и в примере 4, мы воспользовались удобным обстоятельством, которое надо иметь в виду всегда, решая задачи с окружностями. Дело в том, что все *треугольники, вписанные в одну окружность, имеют общий элемент — радиус этой окружности*. Это значит, что найдя его в одном из таких треугольников, мы получаем возможность для использования этой информации во всех остальных треугольниках.

В следующих параграфах этой главы, а также в главе 4 мы рассмотрим ещё немало интересных задач, в которых использованы различные свойства окружностей. Однако уже сейчас, обобщив изученное, можно выявить некоторые закономерности:

1) задачи с окружностями — это, в первую очередь, задачи на «перебрасывание» углов, нередко с «выходом» в дальнейшем на подобные треугольники (примеры — 3, 5; задачи — 2, 4–7, 9, 11); особенно это хорошо «работает», когда в условии задачи явно присутствует слово «касательная» и существует хорда, исходящая из точки касания (пример 3; задачи — 4, 6);

2) задачи с окружностями — это задачи и на «перебрасывание» длин отрезков, что также нередко приводит к существенному продвижению в их решении (примеры — 2, 6; задачи — 1, 3, 5, 7, 9, 10);

3) задачи с окружностями — это задачи, в которых радиус окружности играет роль общего элемента во всех треугольниках, вписанных в эту окружность (пример 4; задача 11);

4) в задачах с окружностями простейшие алгебраические действия можно совершать не только с величинами углов и длинами отрезков (что является делом вполне привычным), но также и с длинами дуг окружности, т.к. из этого можно получить дополнительную информацию о длинах хорд, стягивающих эти дуги (пример 6; задачи — 8, 9).

Изучив материал этого параграфа, попробуйте свои силы в самостоятельном решении задач.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность так, что $BC \parallel AD$ и $DC = DE$. Определить величину угла между прямыми AE и BD.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, при этом $\angle ADC = 120°$, $\angle ABD = \angle DBC$. Найти отношение $AC : AD$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол при вершине A равен $2a$. Прямая, проходящая через вершину B и центр O описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AC в точке D. Найти BD, если $AC = b$.

4 (*МГУ, биологич. ф-т, 1990*). Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найти радиус окружности.

5. В окружности радиуса r проведена хорда, равная $r/2$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найти расстояние между касательной и секущей.

6. На основании BC трапеции $ABCD$, как на диаметре, построена окружность, которая проходит через середины диагоналей трапеции и касается основания AD. Найти углы трапеции.

7 (*МГУ, геолог.ф-т, 1998*). Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $AD = 5$, $BC = 10$, $BK = 6$. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$.

8 (*МГУ, ф-т психологии, 1999*). Четырёхугольник $KLMN$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон KL и MN равны соответственно 3 и 5; $KM = 7$, $LN = 6$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке P. Найти радиус окружности, описанной около треугольника KLP.

9 (*МГУ, биологич. ф-т, 1975*). Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найти угол CBD, если площади треугольников DCM и ABC относятся как $1 : 4$.

10 (*МГУ, биологич. ф-т, 1979*). Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна b. Найти площадь трапеции.

§ 3.2. ОКРУЖНОСТИ И МНОГОУГОЛЬНИКИ. МЕТОД «ВИЗУАЛИЗАЦИИ» ОКРУЖНОСТИ

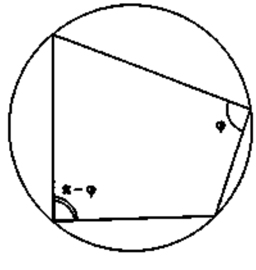
Продолжая начатое в предыдущем параграфе изучение свойств окружностей, обобщим информацию из главы 1, касающуюся окружностей, применительно к задачам с многоугольниками.

1) *Центр вписанной в многоугольник окружности* — точка, равноудалённая от всех его сторон, — *лежит на пересечении биссектрис всех его внутренних углов*. Поэтому радиус вписанной окружности является высотой во всех треугольниках с вершиной в центре этой окружности и с основаниями, совпадающими со сторонами многоугольника. А потому *площадь многоугольника, в который можно вписать окружность*, вычисляется по формуле, аналогичной соответствующей формуле для треугольника: $S = p \cdot r$, где r — *радиус вписанной в этот многоугольник окружности*, а p — *его полупериметр*.

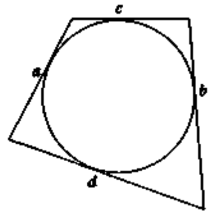
2) *Центр описанной вокруг многоугольника окружности* — точка, равноудалённая от всех его вершин, — *лежит на пересечении серединных перпедикуляров к сторонам этого многоугольника*.

Надо отметить, что в элементарной математике самый распространённый многоугольник — это выпуклый четырёхугольник. Сформулируем две важнейшие теоремы для произвольного выпуклого четырёхугольника, вписанного в окружность или описанного вокруг неё, при доказательстве которых используются приведённые ранее свойства окружностей.

Теорема 1. *Вокруг четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна* 180^0.



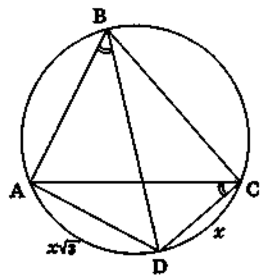
Теорема 2. *В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны: $a + b = c + d$.*



Доказательство этих известных из школьного курса планиметрии теорем не является, как мы уже не раз говорили, целью предлагаемого пособия. Эти доказательства можно найти, например, в учебниках [1–9] и в многочисленных пособиях. А вот применение этих теорем при решении задач — тема настоящего параграфа.

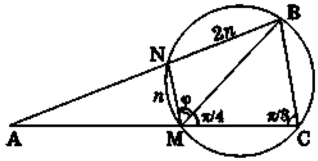
Пример 1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, при этом $AD : DC = \sqrt{3}$, $ABC = 30°$. Найти величину угла ABD.

Решение. В треугольнике ACD величина угла ADC равна $150°$ (теорема 1), а $\angle ACD = \angle ABD$ (т.е искомому, как вписанные, опирающиеся на дугу AD). Обозначив через x длину стороны CD, получим $AD = x\sqrt{3}$. По теореме косинусов: $AC^2 = x^2 + 3x^2 - 2\sqrt{3}x^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. То есть $AC = x\sqrt{7}$.



Применив затем теорему синусов, получим: $\frac{x\sqrt{7}}{\sin 150^0} = \frac{x\sqrt{3}}{\sin ACD}$. Откуда $\sin ACD = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$. При этом угол ACD — острый, поэтому его величина равна $\arcsin\left(\sqrt{21}/14\right)$. Ответ: $\arcsin\left(\sqrt{21}/14\right)$.

Задача 1 (*МГУ, геолог.ф-т, 2003*). Окружность пересекает стороны угла BAC в точках B, N, M и C, точка N находится между A и B, точка M — между A и C. Величины углов ACB и BMC равны $\pi/3$ и $\pi/4$ соответственно, $BN = 2MN$. Чему равна величина угла BAC?



Решение. 1) $\angle BNM=\frac{2\pi}{3}$ (обоснуйте самостоятельно).

2) Обозначив $\angle NMB=\varphi$, получим $\angle NBM=\frac{\pi}{3}-\varphi$.

3) По теореме синусов из ΔNBM: $\frac{BN}{\sin\varphi}=\frac{MN}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}$, или $\frac{2\cdot MN}{\sin\varphi}=\frac{MN}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi}$. Отсюда $\sin\varphi=\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Искомый угол BAC есть угол между двумя пересекающимися секущими, который, как известно, измеряется полуразностью дуг окружности, заключённых внутри него: $\angle BAC=\frac{1}{2}(\cup BC-\cup MN)=$ $\angle BMC-\angle NBM=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$. Здесь также учтено, что длина дуги окружности в два раза больше величины вписанного угла, на эту дугу опирающегося. **Ответ:** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$.

Из теорем 1 и 2 легко следуют свойства, которые приобретают при взаимодействии с окружностями четырёхугольники специального вида — параллелограммы и трапеции:

1. *Параллелограмм, описанный вокруг окружности, является ромбом. В любой ромб можно вписать окружность.*
2. *Параллелограмм, вписанный в окружность, является прямоугольником. Вокруг любого прямоугольника всегда можно описать окружность.*
3. *Трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной. Вокруг любой равнобедренной трапеции всегда можно описать окружность.*
4. *В трапеции, описанной около окружности, полусумма длин её боковых сторон равна длине средней линии трапеции, а высота этой трапеции равна диаметру вписанной в неё окружности.*

Эти геометрические факты, безусловно, нужно хорошо знать и, при необходимости, уметь быстро выводить из соответствующих теорем.

Пример 2. Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5:11. Найти длины оснований трапеции.

Решение. Так как в трапецию можно вписать окружность, сумма длин её оснований равна сумме длин боковых сторон, т.е. 16. Тогда длина средней линии трапеции равна 8. Средняя линия делит трапецию на две другие трапеции с равными высотами, следовательно, отношение их площадей равно отношению соответствующих сумм длин оснований каждой из них.

Обозначив через x длину меньшего основания заданной в условии трапеции, получим, что длина её большего основания равна $(16 - x)$, а отношение площадей вновь образованных двух трапеций равно $\frac{8+x}{8+(16-x)}=\frac{5}{11}$. Откуда $x = 2$. Соответственно длина большего основания исходной трапеции равна 14. **Ответ:** 2; 14.

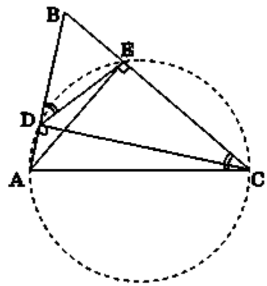
Пример 3. Середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ принадлежат одной окружности. Найти её радиус, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника взаимно перпендикулярны, а длина отрезка AC равна 2.

Решение. Четырёхугольник, вершины которого являются серединами сторон $ABCD$, — параллелограмм (необходимо обосновать), вписанный по условию в окружность, т.е. прямоугольник. Его диагонали взаимно перпендикулярны, значит, это ромб, а точнее — квадрат, длина стороны которого равна половине длины AC (необходимо также обосновать), т.е. равна 1. Но тогда диагональ квадрата равна $\sqrt{2}$, а искомый радиус равен половине этой диагонали.

Ответ: $\sqrt{2}/2$.

Отметим особо, что каждая из теорем 1 и 2 формулируется как в прямую, так и в обратную стороны. С одной стороны, эти теоремы фиксируют свойства вписанного и описанного четырёхугольников, а с другой, и это не менее важно, — позволяют по наличию в четырёхугольнике одного из сформулированных выше свойств «увидеть» окружность, которая, как мы уже не раз убеждались, сама по себе является мощным инструментом, позволяющим переносить информацию от одного элемента геометрической конструкции к другому.

Пример 4. В треугольнике ABC точка D принадлежит стороне AB, точка E — стороне BC. При этом $\angle BDE = \angle ACB$, а величина угла ADC равна среднему арифметическому величин углов DAC и DEC. Найти отношение $DE : AC$, если угол ABC в три раза меньше угла ADC.

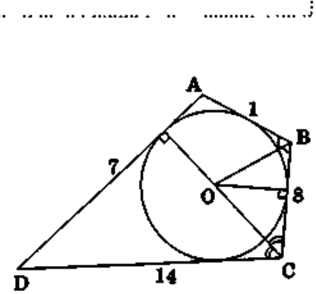


Решение. 1) $\Delta DBE \sim \Delta CBA$ (по двум углам, один из которых — общий, а другие равны по условию). Определим коэффициент k этого подобия.

2) $\angle ADE = 180^\circ - \angle BDE$ (смежные углы), $\angle BDE = \angle ACB$ (по условию) $\Rightarrow$ вокруг четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность (теорема 1) $\Rightarrow \angle DAC + \angle DEC = 180^\circ$ (теорема 1) $\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$ (из условия) $\Rightarrow \angle AEC = 90^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на дугу AC, равны). Таким образом, получается, что AE и CD — высоты в $\Delta ABC \Rightarrow k = \cos\angle ABC$ (необходимо обоснование).

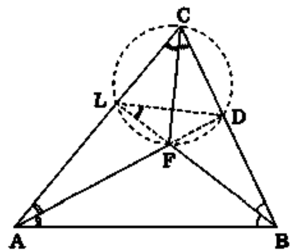
3) $\angle ABC = \angle ADC / 3 = 30^\circ$ (по условию $\angle ABC$ в три раза меньше $\angle ADC$) $\Rightarrow DE : AC = k = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$. **Ответ:** $\sqrt{3}/2$.

Пример 5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длины сторон AB, BC, CD и DA соответственно равны 1, 8, 14 и 7. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке O. Найти расстояние от этой точки до стороны AD, если площадь треугольника BOC равно 20.



Решение. Обратим внимание на то, что $1 + 14 = 7 + 8$, а это значит, в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность (теорема 2). Центр этой окружности лежит на пересечении биссектрис всех его внутренних углов. Точка O, заданная в условии, лежит на пересечении двух из них. Поэтому именно точка O является центром этой окружности. Искомое расстояние при этом будет радиусом вписанной окружности, который, в свою очередь, является высотой в ΔBOC. Зная площадь этого треугольника и длину его основания BC, легко найти $h=\dfrac{2\cdot 20}{8}=5$. **Ответ:** 5.

> **Задача 2** (*МГУ, географич. ф-т, 1999*). В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. Величина угла LFA равна $60°$. 1) Найти величину угла ACB. 2) Вычислить площадь треугольника ABC, если $\angle CLD = 45°$ и $AB = 2$.



Решение. 1) Учитывая, что F — точка пересечения биссектрис ΔABC, можно найти связь между углами AFB и ACB (см. § 1.4): $\angle ACB = 180° - 2(\angle FAB+\angle FBA) = 180° - 2\angle LFA = 60°$.

2) Для определения площади в ΔABC необходимо найти ещё один элемент, т.к. сторона и один из его углов уже известны. Если обратить внимание на то, что $\angle LFD+\angle LCD=180°$, то по теореме 1 вокруг четырёхугольника $LFDC$ можно описать окружность. Следовательно, $\angle FLD=\angle FCD=30°$ (обоснуйте самостоятельно). Но тогда, с учётом условия задачи, $\angle CLB=75°$, а потому $\angle LBC=45°$. Учитывая, что LB — биссектриса $\angle ABC$, получаем: ΔABC — прямоугольный, у которого $BC=2\operatorname{ctg}60° = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, а площадь $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB\cdot BC = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

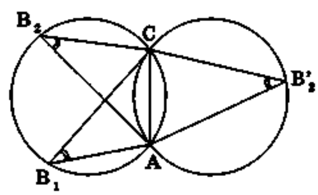
Ответ: 1) $60°$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

В последних двух примерах и задаче 2 по некоторым признакам, следующим из теорем 1 и 2, нам удалось догадаться о существовании окружности, проходящей через определённые точки, заданные в условии задачи, и тем самым установить дополнительные связи между её геометрическими элементами. Однако неявное присутствие окружности можно обнаружить и обосновать не только с помощью этих теорем. Использование теоремы о вписанном угле и её следствий также может дать аналогичный результат.

Действительно, достаточно распространённой в задачах с многоугольниками бывает ситуация, когда в результате анализа удаётся выявить два различных треугольника с общим основанием и равными углами при вершинах, противолежащих этому основанию. В этом случае можно показать, что вершины равных углов будут принадлежать либо общей окружности, описанной вокруг рассматриваемых треугольников (если эти вершины лежат по одну сторону от основания), либо двум симметричным относительно общего основания треугольников окружностям, каждая из которых описана вокруг соответствующего треугольника. Последнее реализуется, когда вершины треугольников с равными углами лежат по разные стороны от их общего основания.

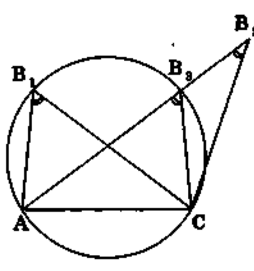
Приведённый факт можно представить в виде следующего утверждения.

Вершины равных углов, опирающихся на один отрезок, лежат на дуге окружности, хордой которой он является, либо на симметричной относительно этой хорды дуге окружности того же радиуса.



Проведём его доказательство в первом случае.

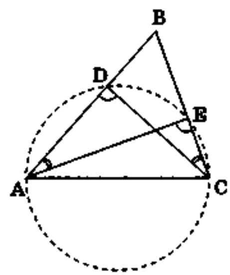
Для этого опишем вокруг одного из треугольников AB_1C окружность и предположим, что вершина B_2 другого треугольника AB_2C не принадлежит этой окружности. Пусть, например, B_2 лежит вне образованного круга. Тогда, обозначив точку пересечения окружности со стороной AB_2 через B_3, получим, что $\angle AB_3C=\angle AB_1C$ (как вписанные, опирающиеся на дугу AC), $\angle AB_1C=\angle AB_2C$ (по условию) и $\angle AB_3C=\angle AB_2C+\angle B_2CB_3$ (т.к. внешний угол в ΔB_3B_2C равен сумме двух внутренних, не смежных с ним). В итоге, получаем $\angle B_2CB_3=0$, откуда следует, что точки B_2 и B_3 совпадают, т.е. B_2 принадлежит окружности.



Случай, когда B_2 лежит внутри окружности, описанной вокруг ΔAB_1C, рассматривается абсолютно аналогично (прямую AB_2 нужно при этом продолжить до пересечения с окружностью).

При обосновании данного утверждения для случая, когда точки B_1 и B_2 лежат по разные стороны от AC, необходимо, описав окружность вокруг ΔAB_1C, построить симметричную ей окружность относительно прямой AC. Все точки, принадлежащие дуге этой окружности и лежащие с другой стороны от AC относительно B_1, являются вершинами углов, опирающихся на AC и равных (в силу симметрии) углу AB_1C. А значит, точка B_2 должна находиться среди них (обоснование, аналогичное изложенному выше, проведите самостоятельно).

Пример 6. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, на стороне BC — точка E так, что $\angle BDC = 60°$, а $\angle AEC = 120°$. Определить величину угла BCD, если $BAE = 21°$.



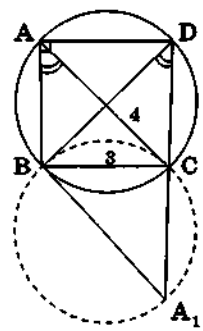
Решение. Понятно, что угол ADC, как смежный к углу BDC, равен $120°$. Но тогда лежащие по одну сторону от отрезка AC вершины D и E равных углов, опирающихся на этот отрезок, принадлежат дуге окружности, проходящей также через точки A и C. Теперь получается, что точки A и C являются вершинами вписанных углов, опирающихся на дугу DE этой окружности. Значит, эти углы равны.

Ответ: $21°$.

Задача 3 (*МГУ, социологич. ф-т, 1999*). В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. При этом оказалось, что $\angle BAC = \angle BDC$, а площадь круга, описанного около треугольника BDC равна $\frac{25\pi}{4}$.

а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Зная, что $BC = 3$, $AC = 4$, $\angle BAD = 90°$, найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.



Решение. Все предпосылки для применения утверждения о равных углах, опирающихся на один отрезок, в задаче заданы. Из этого утверждения следует, что либо вершина A принадлежит окружности, описанной около ΔBDC, либо симметричной ей окружности относительно прямой BC. Однако в силу выпуклости четырёхугольника $ABCD$ (напомним, это означает, что вся фигура должна полностью лежать в одной полуплоскости относительно любой из прямых, содержащих стороны $ABCD$) вершины A и D обязаны находиться строго по одну сторону относительно прямой BC. Поэтому для решения первой части задачи достаточно определить радиус круга, описанного около ΔBDC, площадь которого равна $S=\pi R^2=25\pi/4$. Откуда сразу $R=5/2$.

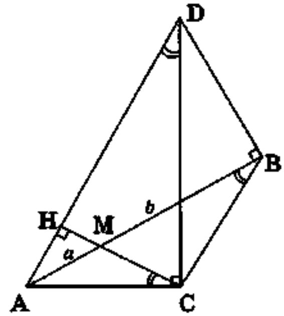
Вторая часть задачи представляет из себя обычный расчёт треугольников. Действительно, после вычисления радиуса описанной окружности в ΔABC оказываются заданными три элемента. Найдём длину стороны AB. Для этого обозначим угол BCA через φ. Тогда по теореме синусов $AB=5\sin\varphi$, а по теореме косинусов $(5\sin\varphi)^2 = 3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\varphi$. Откуда либо $\cos\varphi=0$ и $\varphi=90°$ (что невозможно, т.к. в прямоугольном ΔABD угол ADB также равен φ, как вписанный, опирающийся на дугу AB, а потому $\varphi<90°$), либо $\cos\varphi=24/25$. Соответственно $\sin\varphi=7/25$ и $AB=7/5$. Кроме того, в прямоугольном ΔABD: $BD=2R=5$, $AD=BD\cos\varphi=24/5$ и его площадь равна $S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{24}{5}=\frac{84}{25}$.

Учитывая, что ΔBDC также является прямоугольным (т.к. BD — диаметр описанной окружности), используя теорему Пифагора, легко получить: $DC=4$ и $S_{BCD}=6$.

Искомая площадь, как сумма найденных площадей треугольников, равна $\frac{84}{25}+6=\frac{234}{25}$.

Ответ: а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{234}{25}$.

Задача 4 (*МГУ, физич. ф-т, 1991*). В треугольнике ABC угол C тупой, D — точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведённая из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найти AC.



Решение. Интересно, что в этой задаче можно «увидеть» целых две окружности: одна проходит через точки D, B, M и H (основание высоты ΔADC, проведенной из вершины C) и имеет диаметр DM; другая проходит через точки A, C, B и D и имеет диаметр AD (обоснуйте эти выводы самостоятельно).

Нам, однако, потребуется только вторая окружность. Именно в ней $\angle ADC = \angle ABC$. Кроме того, в прямоугольном ΔADC: CH — высота, а потому $\angle ACH = \angle ADC$ (обоснуйте самостоятельно).

В результате, мы получили хорошо известную в теории подобия конфигурацию, когда треугольники (в нашем случае это ABC и AMC) имеют общий угол и ещё по одному равному углу (соответственно $\angle ABC$ и $\angle MCA$). Из подобия этих треугольников сразу следует: $\dfrac{AC}{a} = \dfrac{a+b}{AC}$.

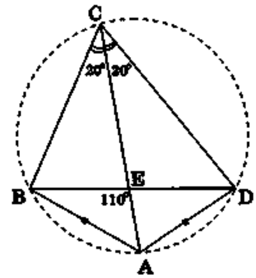
Ответ: $\sqrt{a(a+b)}$.

Стоит напомнить ещё один геометрический факт, рассмотренный нами в §1.4, также позволяющий нарисовать окружность в ситуации, когда её первоначально не видно. Он звучит так.

Биссектриса угла C треугольника ABC пересекается с серединным перпендикуляром к противолежащей стороне в точке D, которая принадлежит окружности, описанной вокруг ABC.

Проиллюстрируем этот факт на примере следующей задачи.

Задача 5 (*МГУ, мех-мат, 1999*). Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, длины сторон AB и AD равны, CA — биссектриса угла BCD, $\angle BAD = 140°$, $\angle BEA = 110°$. Определить величину угла CDB.



Решение. Так как $AB = AD$, то точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BD. Кроме того (по условию) CA — биссектриса угла BCD. Следовательно, точка A (результат пересечения биссектрисы угла C с серединным перпендикуляром к BD) принадлежит окружности, описанной вокруг ΔBCD.

Далее, $\angle BCD = 40°$, $\angle ECD = 20°$, $\angle CED = 110°$, $\angle CDB = 50°$ (проведите обоснование и выкладки самостоятельно).

Ответ: $50°$.

Единственное, что необходимо подчеркнуть ещё раз, — при решении задачи 5 обоснование использованного геометрического факта должно быть приведено полностью. И если вы не можете этого сделать самостоятельно, рекомендуем ещё раз прочитать §1.4.

Итак, на примере достаточно большого количества задач нами был исследован приём «визуализации» окружности в задачах с многоугольниками. Мы увидели, как знание свойств окружности, сформулированных в теоремах 1 и 2, а также в некоторых специальных геометрических утверждениях и фактах, даёт возможность исследователю «почувствовать» присутствие окружности даже тогда, когда она в задаче явно не задана, а затем, сделав соответствующее дополнительное построение и обоснование, существенным образом ускорить процесс решения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, при этом $AB = BC = 1$, $\quad ADC = 120°$, $\quad ABD = 3 \quad DBC$. Найти AD.

2. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, на стороне BC — точка E так, что $\quad BDC + \quad AEC = 180°$. Отрезки AE и DC пересекаются в точке O. При этом $AD : EC = 1 : 2$, $DO : OC = 2 : 5$, $AC = 7$. Найти DE.

3. *(МГУ, ф-т почвовед., 1996)*. Во вписанном в окружность четырёхугольнике $KLMN$: $KL = 2$, $LM = 3$, $\angle KLM = 120^0$, а диагональ LN является отрезком биссектрисы угла KLM. Найдите длину этой диагонали.

4. *(МГУ, географ. ф-т, 1995)*. Вокруг четырёхугольника $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD описана окружность радиуса 2. Найти длину стороны CD, если $AB = 3$.

5 *(МГУ, физич. ф-т, 1999)*. Трапеция $KLMN$ ($LM \parallel KN$) вписана в окружность, а другая окружность вписана в эту трапецию, $LM : KN = 1 : 3$, площадь трапеции равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найти высоту трапеции.

6 *(МГУ, геолог. ф-т, 2000)*. В трапецию с верхним основанием 5 и боковой стороной 6 можно вписать окружность и около неё можно описать другую окружность. Вычислить площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, ее нижним основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

7 *(МГУ, филологич. ф-т, 1987)*. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности. Найти AB, если $BE = AM = 3$.

8 *(МГУ, геолог. ф-т, 1974)*. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B — медиана BP. Известно, что угол APB равен углу BMA, косинус угла ACB равен 0,8 и $BP = 1$. Найти площадь треугольника ABC.

9 *(МГУ, мех-мат, 2003)*. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 50°$ и стороной $BC = 3$ на высоте BH взята такая точка D, что $\angle ADC = 130°$ и $AD = \sqrt{3}$. Найти угол между прямыми AD и BC, а также $\angle CBH$.

10 *(МГУ, мех-мат, 2004, устн. экз.)*. В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке O. Прямая AO пересекается с окружностью, описанной около треугольника OBC, в точках O и M. Найти OM, если $BC = 2$, а угол A равен $30°$.

§ 3.3. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ПРИСУТСТВУЮТ НЕСКОЛЬКО ОКРУЖНОСТЕЙ

Разберёмся теперь в специфике задач, в которых присутствуют несколько окружностей.

1. Касание двух окружностей

Это наиболее распространённый случай взаимного расположения двух окружностей. При решении таких задач необходимо учитывать следующее:

1. Касание окружностей бывает двух видов — *внутреннее и внешнее*. Если через точку касания провести общую касательную к каждой из этих окружностей, то относительно этой прямой окружности будут располагаться либо обе с одной стороны (в случае внутреннего касания), либо соответственно с разных сторон. Неучёт этого обстоятельства и рассмотрение только одного из двух возможных случаев касания часто является причиной неполного решения поставленной задачи.

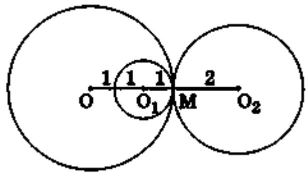
2. *Точка касания двух окружностей* (как внутреннего, так и внешнего) *лежит на линии центров этих окружностей.* Это важно, т.к. зная расположение на плоскости любых двух из этих точек, мы можем сузить круг поиска положения третьей.

3. *Общая касательная к двум окружностям, проведённая через точку их взаимного касания, перпендикулярна линии центров этих окружностей.*

4. *Расстояние между центрами двух окружностей в случае внешнего касания равно сумме их радиусов. В случае внутреннего касания это расстояние равно модулю разности радиусов окружностей.*

Приведём несколько примеров.

Пример 1. Через точку M окружности радиуса R с центром O проведены две другие окружности, касающиеся исходной: одна — с центром в точке O_1 радиуса 1, другая — с центром в точке O_2. Определить R, если $O_1O_2 = 3$, а $OO_2 = 5$.



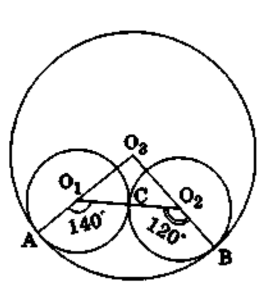
Решение. Из условия касания каждой из двух заданных окружностей с окружностью радиуса R следует, что и точка O_1, и точка O_2 лежат на прямой OM. Однако в условии не сказано, каким является это касание — внешним или внутренним. Поэтому задача решающего — рассмотреть все возможные варианты взаимного расположения всех трёх окружностей (а соответственно и точек O, M, O_1, O_2 на прямой OM) друг относительно друга. Только тогда решение будет полным.

Проведём его для случая, когда окружность с центром O_1 касается окружности радиуса R внутренним образом, а окружность с центром O_2 — соответственно внешним образом. В этом случае $O_1O_2 = O_1M + MO_2$, или (с учётом условия) $3 = 1 + MO_2$, $MO_2 = 2$. В результате $R = OM = OO_2 - MO_2 = 3$.

Другие случаи взаимного расположения точек O, M, O_1, O_2 на прямой OM проанализируйте самостоятельно. Советуем учесть, что отрезок OO_2 строится однозначно. Затем можно построить точку O_1 (два варианта: на отрезке OO_2 или на его продолжении). А уже после этого смотрите, где может находиться точка M.

Ответ: 3; 7; 1; 9.

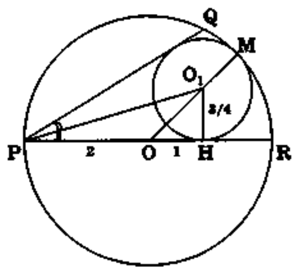
Пример 2. Две окружности с центрами O_1 и O_2, касающиеся друг друга внешним образом в точке C, расположены внутри третьей и касаются с ней внутренним образом в точках A и B соответственно. Определить радиус третьей окружности, если $AB = \sqrt{2}$, $\angle AO_1C = 140°$, $\angle CO_2B = 130°$.



Решение. Из условия внешнего касания первых двух окружностей следует, что точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой. Из условия внутреннего касания каждой из этих окружностей с третьей окружностью следует, что центр O_3 третьей окружности одновременно принадлежит двум прямым AO_1 и BO_2, т.е. является их точкой пересечения. Заметим далее, что сумма двух углов $O_3O_1O_2$ и $O_3O_2O_1$ (как смежных к заданным) равна $90°$, а потому прямые AO_1 и BO_2 — взаимно перпендикулярны. Учитывая, что $O_3A = O_3B = R$, задача далее сводится к вычислению катета в равнобедренном прямоугольном треугольнике AO_3B с известной гипотенузой AB: $2R^2 = AB^2$, т. е. $R = 1$.

Ответ: 1.

Задача 1 (*МГУ, ф-т почвовед., 2003*). В окружность радиуса 2 вписан угол QPR так, что PR — диаметр окружности. В угол QPR вписана ещё одна окружность радиуса $3/4$ так, что она касается большей окружности внутренним образом. Найти величину угла QPR.

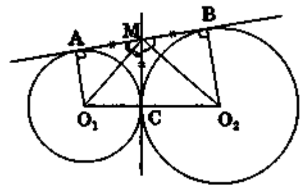


Решение. Обозначим через O центр окружности радиуса 2, через O_1 — центр окружности, вписанной в угол QPR, а через M и H точки её касания соответственно с внешней окружностью, а также с диаметром PR. Из условия внутреннего касания окружностей следует: $OO_1 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Но тогда, учитывая, что $O_1H = \frac{3}{4}$, по теореме Пифагора из прямоугольного ΔOO_1H получим: $OH = 1$. Для определения искомого угла QPR заметим, что центр O_1 лежит на биссектрисе этого угла, половину которого можно определить из прямоугольного треугольника PO_1H. В этом треугольнике катет $PH = PO \pm OH = 2 \pm 1$ (именно $\pm$, а не $+$, как можно было бы подумать, исходя из рисунка, т.к. существует случай, когда точка H находится между точками P и O). Следовательно, $\text{tg}\angle O_1PH = \frac{O_1H}{PH} = \frac{3/4}{2\pm1}$. Искомый угол равен $2\text{arctg}\angle O_1PH$.

Ответ: $2\text{arctg}\frac{1}{4}$ или $2\text{arctg}\frac{3}{4}$.

После рассмотрения этих примеров продолжим наше исследование.

5. У касающихся друг друга внешним образом окружностей существуют две общие касательные AB и MC (рассмотрение только одной из двух возможных конфигураций может являться причиной неполного решения).

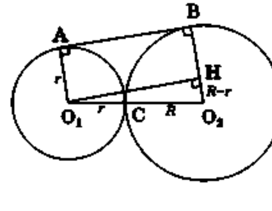


Точка пересечения M этих касательных является центром окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, вершинами которого являются точки касания (точки C, A и B). Точка M также является вершиной прямоугольного треугольника, гипотенуза которого — отрезок O_1O_2, соединяющий центры окружностей.

Действительно, т.к. $MA = MC$ и $MC = MB$, то M — середина гипотенузы прямоугольного ΔABC.

Кроме того, из равенства прямоугольных треугольников AMO_1 и CMO_1 следует равенство соответствующих углов $\angle AMO_1 = \angle CMO_1$, а потому O_1M и O_2M(доказывается аналогично) являются биссектрисами смежных углов AMC и CMB, следовательно, они перпендикулярны.

6. В случае, когда общая касательная к двум касающимся внешним образом окружностям не проходит через точку их касания, *отрезок общей касательной двух касающихся окружностей есть среднее геометрическое между диаметрами этих окружностей.*



Рассмотрим подробнее этот полезный для будущего геометрический результат. Дело в том, что когда к двум касающимся внешним образом окружностям (обозначим их центры через O_1 и O_2, а радиусы соответственно через r и R) проведена общая касательная

AB (A и B — точки касания каждой из рассматриваемых окружностей с этой прямой), то распространённым является следующее дополнительное построение: соединить центры окружностей с соответствующими им точками касания и провести через центр O_1 окружности меньшего радиуса прямую O_1H, параллельную AB. В результате образуется прямоугольник AO_1HB и прямоугольный треугольник O_1HO_2 с известными гипотенузой, равной сумме радиусов окружностей $R+r$, и катетом O_2H, равным разности этих радиусов $R-r$ (обоснуйте самостоятельно). Второй катет этого треугольника легко посчитать по теореме Пифагора: $(R+r)^2=(R-r)^2+O_1H^2$. Его длина как раз и будет искомым расстоянием между точками касания окружностей с прямой AB: $O_1H=AB=2\sqrt{Rr}=\sqrt{2R\cdot 2r}$.

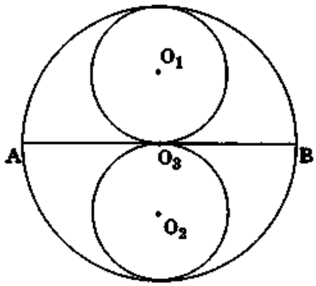
Отметим, что построение характеристического треугольника O_1HO_2 полезно ещё и тем, что один из его острых углов является углом между линией центров окружностей и проведённой к ним общей касательной. Этот угол в задачах часто бывает востребованным. Именно поэтому, как мы увидим далее, это дополнительное построение проводят не только в случае касающихся окружностей.

Задача 2. Две окружности, касающиеся друг друга внешним образом, расположены внутри третьей и касаются с ней внутренним образом. Общей касательной к этим двум окружностям является диаметр третьей окружности, причём точка касания одной из них совпадает с центром третьей окружности, радиус которой равен 1. Найти радиусы первых двух окружностей.

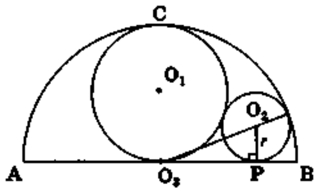
Решение. Обозначим через O_3 центр третьей окружности. По условию задачи эта точка является точкой касания одной из заданных окружностей (обозначим её центр через O_1) с диаметром AB третьей окружности.

Учитывая при этом, что центры O_1 и O_3 лежат на одной прямой с точкой C касания этих двух окружностей, получим, что O_3C — диаметр окружности с центром O_1, который совпадает с радиусом третьей окружности, а потому радиус $O_1O_3=O_1C=\dfrac{O_3C}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Чтобы вычислить радиус r окружности с центром O_2, надо сначала определить месторасположение этого центра. И здесь возможны два варианта:



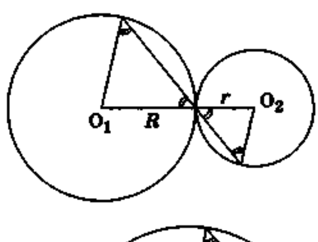
1) диаметр AB, являясь общей касательной к первым двум окружностям, проходит через точку их касания O_3, т. е. радиус $O_2O_3 = \frac{1}{2}$ (окружности симметричны относительно AB);

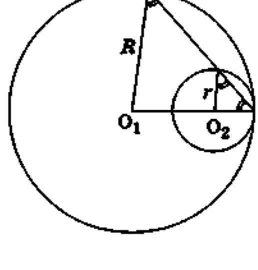


2) первые две окружности касаются AB в двух различных точках O_3 и P. Тогда, как мы уже знаем, расстояние $O_3P = 2\sqrt{\frac{r}{2}}$. Связующим уравнением для определения r является теорема Пифагора для прямоугольного треугольника O_2PO_3, гипотенуза которого равна разности радиусов третьей окружности и окружности с центром O_2 (в силу их внутреннего касания): $(1-r)^2 = r^2 + \left(2\sqrt{\frac{r}{2}}\right)^2$. Отсюда получаем $r = \frac{1}{4}$.

Ответ: а) 1/2; 1/2; б) 1/4; 1/2.

7. ***Если через точку касания двух окружностей под углом к линии их центров провести прямую, то образованные при этом хорды окружностей становятся основаниями двух подобных равнобедренных треугольников с вершинами в центрах этих окружностей и коэффициентом подобия, равным отношению длин их радиусов.***

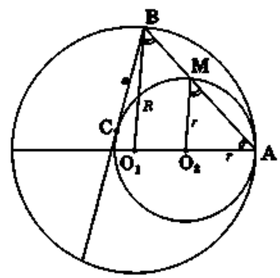




В результате на рисунке появляются две параллельные прямые, а это, в свою очередь, может быть источником интересного геометрического продолжения.

Этот геометрический факт реализуется как для случая внутреннего, так и для случая внешнего касания окружностей. Обоснование его не представляет никакой сложности.

Задача 3. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) внутренне касаются в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти AB, если $BC = a$.



Решение. Соединим точки A и B, обозначив через M вторую точку пересечения отрезка AB с внутренней окружностью. Тогда к этой геометрической конструкции можно применить теорему о касательной и секущей: $BC^2 = BA \cdot BM$. Заметив, что BA и MA являются хордами двух окружностей, принадлежащими общей секущей, проходящей через точку внутреннего касания этих окружностей, несложно догадаться, что длину BM можно выразить через BA и радиусы окружностей. Действительно, т.к. $\frac{BA}{MA} = \frac{R}{r}$ и $BA = BM + MA$, то $BM = \frac{R-r}{R} BA$. Подставив это выражение для BM в теорему о секущей и касательной, получим $a^2 = \frac{R-r}{R} BA^2$, отсюда $AB = a\sqrt{\frac{R}{R-r}}$.

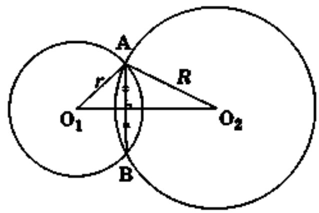
Заметим, что из точки B можно провести ещё одну касательную к меньшей окружности, но она тоже будет иметь длину a, поэтому результат не изменится.

Ответ: $a\sqrt{\frac{R}{R-r}}$.

2. Пересечение двух окружностей

Рассмотрим теперь отличительные особенности геометрической конструкции, состоящей из двух пересекающихся окружностей.

Линия центров этих окружностей является их общей осью симметрии, а потому *точки пересечения будут симметричны относительно этой прямой.*



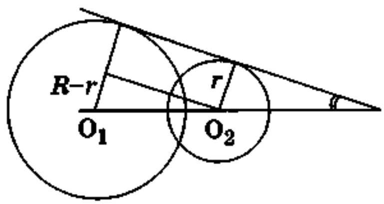
Следовательно, *общая хорда двух пересекающихся окружностей есть отрезок, перпендикулярный линии центров этих окружностей, который делится этой линией пополам.*

У этой конструкции есть *определяющие элементы*. Это *радиусы окружностей, расстояние между их центрами,* а также *длина общей хорды*. Знание *любых трёх* из них даёт возможность вычислить все остальные её геометрические характеристики.

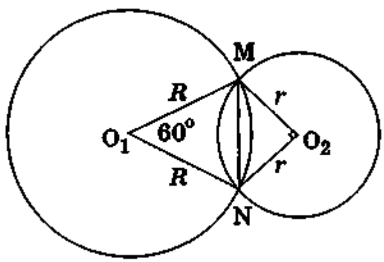
Действительно, ведь радиусы окружностей и расстояние между центрами будут сторонами треугольника, высота которого будет половиной их общей хорды.

Учитывая, что случай касания окружностей есть лишь частный случай их пересечения (когда точки пересечения совпадают), многое из того, что мы уже рассмотрели в предыдущем пункте, применимо и к приведённым ниже задачам. Покажем это.

Пример 3. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти угол между общей касательной, проведённой к этим окружностям и линией их центров, если расстояние между этими центрами равно $\sqrt{3}+1$.



Решение. Искомый угол удобно определить из характеристического треугольника, который строится точно так же, как и в случае касания окружностей. Гипотенузой в этом треугольнике будет отрезок, соединяющий центры окружностей, а катет, лежащий напротив искомого угла, равен разности радиусов этих окружностей. Поэтому для вычисления синуса этого угла необходимо сначала определить сами радиусы.



Обозначим больший из них через R, а центр соответствующей ему окружности через O_1, меньший – через r, а центр через O_2. Выразив дважды длину общей хорды MN из равнобедренных треугольников O_1MN и O_2MN с известными углами при вершинах, получим: $MN=R=r\sqrt{2}$. Длина O_1O_2 в этом случае будет суммой высот этих треугольников:

$$O_1O_2=\frac{R\sqrt{3}}{2}+\frac{r\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}+1.$$

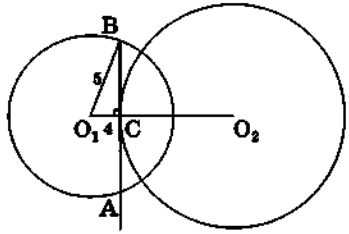
В итоге отсюда получаем $R=2$, $r=\sqrt{2}$ (недостающие выкладки проведите самостоятельно), и поэтому синус искомого угла равен $\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

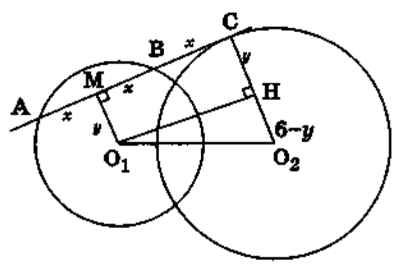
Задача 4. Даны две окружности радиусов 5 и 6, расстояние между соответствующими центрами O_1 и O_2 которых равно 10. Из точки C, принадлежащей второй окружности проведена к ней касательная, пересекающая первую окружность в точках A и B так, что $AB = 2BC$. Найти AB.

Решение. Задача эта интересна в первую очередь тем, что её формулировка допускает два различных случая расположения точки C на второй окружности и эту альтернативность условия надо учиться предусматривать.

1 случай. Точка C находится между точками A и B. Тогда из условия задачи следует, что $AC = BC$, т.е. точка C – есть основание перпендикуляра, опущенного на AB из точки O_1. Но, т.к. C есть точка касания AB со второй окружностью, AB также перпендикулярен радиусу O_2C. Следовательно, точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой, а потому $O_1C = O_1O_2 - O_2C = 10 - 6 = 4$. Отсюда $BC = 3$, $AB = 6$ (обоснуйте самостоятельно).



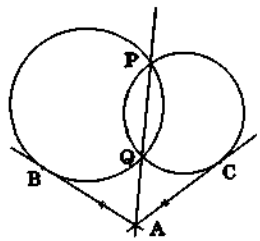
2 случай. Точка C находится вне отрезка AB (а значит и вне первого круга). При этом точка B находится между A и C (подумайте почему).



Если опустить из точек O_1 и O_2 перпендикуляры на прямую AB, один из них попадёт в точку касания C, а другой в середину M отрезка AB (сделайте обоснование). Введём неизвестные $AM = MB = BC = x$ и $O_1M = y$. Тогда $x^2 + y^2 = 5^2$. Кроме того, если из точки O_1 опустить перпендикуляр O_1H на радиус O_2C, получится характеристический прямоугольный треугольник O_1O_2H с известной гипотенузой 10 и катетами, равными $O_1H = MC = 2x$ и $O_2H = O_2C - HC = 6 - y$. Теорема Пифагора даёт в этом случае ещё одно соотношение между x и y: $4x^2+(6-y)^2=100$. Положительным решением этой несложной системы уравнений является пара чисел $x=\sqrt{21}$, $y=2$. В итоге: $AB=2x=2\sqrt{21}$. **Ответ: 6 или $2\sqrt{21}$.**

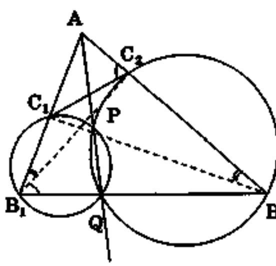
Рассматриваемая нами геометрическая конструкция с двумя пересекающимися окружностями допускает интересные аналогии со случаем, когда окружность только одна.

Если через точки P и Q пересечения двух окружностей провести прямую, то для любой точки A этой прямой, лежащей вне отрезка PQ, длины отрезков касательных AB и AC, проведённых к этим окружностям равны.



Этот факт является прямым следствием теоремы о касательной и секущей (в нашем случае – общей для двух окружностей): $AB^2=AP\cdot AQ=AC^2$. Понятно, что он оказывается полезен при переносе длин отрезков внутри геометрических фигур.

Если через точки P и Q пересечения двух окружностей провести прямую и из произвольной точки A этой прямой, лежащей вне отрезка PQ, провести секущие AB_1 и AB_2, пересекающие каждую из окружностей соответственно в точках C_1 и C_2, то в результате такого построения образуются равные углы: $\angle AB_1C_2=\angle AB_2C_1$ и $\angle AC_2C_1=\angle AB_1B_2$.

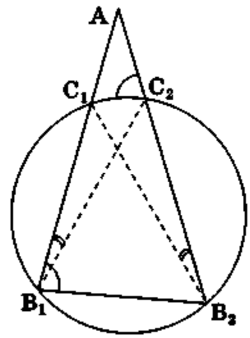


Этот полезный при «перебрасывании углов» факт также является результатом применения теоремы о касательной и секущей (в обобщённой формулировке) к парам секущих, проведённым из точки A к каждой из окружностей: $AB_1 \cdot AC_1 = AP \cdot AQ = AB_2 \cdot AC_2$.

Если переписать эти соотношения в виде $\frac{AB_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AC_1}$, мы получим подобие треугольников AB_1B_2 и AC_2C_1 с общим углом A и пропорциональными сторонами. Как следствие, получается равенство соответствующих углов в этих треугольниках, например, $\angle AC_2C_1 = \angle AB_1B_2$.

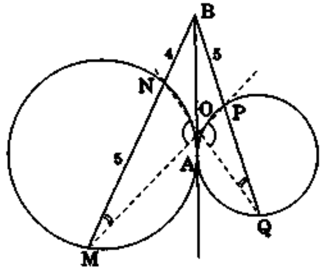
Если же последнюю пропорцию представить в виде $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_2}{AC_1}$, то по тем же причинам получится подобие треугольников AB_1C_2 и AB_2C_1, откуда $\angle AB_1C_2 = \angle AB_2C_1$.

Отметим для сравнения, что точно такие же свойства мы наблюдали в случае пересечения окружности двумя секущими AB_1 и AB_2, однако их обоснование проводилось совсем из других теорем. Обязательно попробуйте вспомнить эти обоснования – это очень полезно.



Задача 5 (*МГУ, ф-т психологии, 1997*). Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Через точку B на их общей касательной AB проведены две прямые, одна из которых пересекает первую окружность в точках M и N, а другая – вторую окружность в точках P и Q. Известно, что $AB = 6$, $BM = 9$, $BP = 5$. Найти отношение площадей треугольников MNO и PQO, где O — точка пересечения прямых MP и NQ.

Решение. Прежде чем начать решение, необходимо правильно расставить точки M и N, а также P и Q на каждой из окружностей.



Это можно сделать из простых соображений. Дело в том, что длина касательной всегда меньше длины секущей и больше внешней части этой секущей, а потому отрезки BM и BQ в задаче будут секущими, а BN и BP – соответствующими им внешними частями секущих.

При этом, используя теорему о секущей и касательной, несложно посчитать длины отрезков $BN = 4$, $MN = 5$, $PQ = 11/5$ (проделайте эту процедуру самостоятельно).

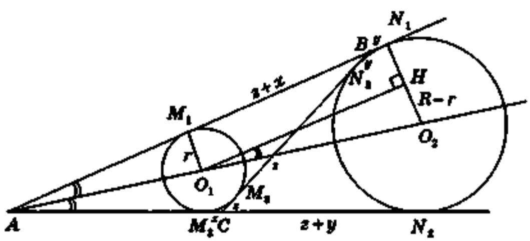
Далее, учитывая равенство углов BMP и BQN, следующее из подобия соответствующих треугольников, а также равенство вертикальных углов MON и POQ, получим, что треугольники MNO и PQO, площади которых сравниваются, являются подобными, а потому $\dfrac{S_{MNO}}{S_{PQO}} = \left(\dfrac{MN}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{11/5}\right)^2 = \dfrac{625}{121}$ (отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента их подобия).

Отметим особо, что в качестве обоснования равенства углов BMP и BQN при решении задачи необходимо проделать действия, аналогичные описанным выше для пересекающихся окружностей (касание окружностей – это, как мы уже говорили, всего лишь частный случай их пересечения).

Ответ: $\dfrac{625}{121}$.

3. Непересекающиеся окружности

Когда в условии задачи присутствуют непересекающиеся окружности, связь между их геометрическими элементами осуществляется чаще всего через прямые, с этими окружностями «взаимодействующие» (т.е. пересекающие их или касающиеся), а потому в основе анализа таких геометрических конструкций лежат теоремы, использующие понятия касательной и секущей. При этом часто бывает, что одна и та же прямая, являясь касательной или секущей для одной из окружностей, одновременно является касательной или секущей для другой окружности. Именно это и является связующим соотношением между их различными элементами.



Проиллюстрируем применение известных нам свойств на примере геометрической конструкции, состоящей из двух непересекающихся окружностей, к которым проведены две внешние и одна внутренняя касательная. Обозначим через M_1, N_1, M_2, N_2 точки внешнего касания, через M_3, N_3 точки внутреннего касания, точку пересечения внешних касательных – через A, а точки пересечения внутренней касательной с внешними – через B и C. Перечислим всё, что может быть полезно при решении задач, в основе которых лежит эта конструкция.

1) $M_1N_1 = M_2N_2$ (следует из равенства отрезков касательных, проведённых из точки A к каждой из окружностей).

2) $CM_2 = CM_3 = BN_3 = BN_1$. Для обоснования этого факта удобно обозначить CM_3 через x, BN_3 — через y, а M_3N_3 — через z. Тогда $BM_1 = BM_3 = z+y$ (следует равенства отрезков касательных, про-

ведённых из точки B к меньшей окружности), $CN_2 = CN_3 = z+x$ (следует из равенства отрезков касательных, проведённых из точки C к большей окружности), $M_1N_1 = z+2y = M_2N_2 = z+2x$ (пункт 1). В итоге получаем $x = y$.

3) $M_1N_1 = BC$ (т.к. $BC = x+z+y = z+2y$).

4) Полупериметр p треугольника ABC равен длине касательной AN_1 (обоснуйте самостоятельно). Этот факт нами уже обсуждался в главе 1 (для треугольника ABC большая окружность является вневписанной).

5) Тригонометрические функции половины угла A, образованного внешними касательными к окружностям, могут быть получены из характеристического прямоугольного треугольника O_1HO_2, если в задаче заданы радиусы окружностей (тогда $O_2H = R-r$), а также расстояние между их центрами O_1O_2 или длины каких-либо из обсуждавшихся выше касательных.

Проведём подобные аналитические действия при решении следующих задач.

Задача 6. Найти длину отрезка общей касательной двух непересекающихся окружностей, радиус одной из которых равен r, другой – $3r$, а кратчайшее расстояние между ними равно радиусу первой окружности.

Решение. В случае внешнего касания длину общей касательной искать из характеристического треугольника. Гипотенуза в нём равна $r+r+3r=5r$, один из катетов равен $3r-r=2r$. Поэтому квадрат второго катета равен $25r^2-4r^2=21r^2$. Значит, длина касательной есть $\sqrt{21r^2}=r\sqrt{21}$.

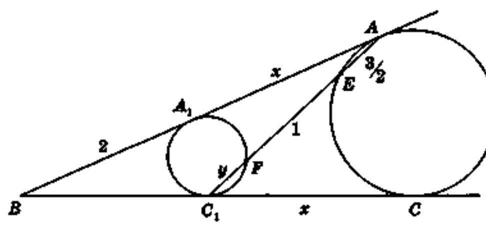
В случае внутреннего касания общая касательная находится как сумма катетов двух подобных с коэффициентом 3 прямоугольных треугольников, гипотенузы которых лежат на линии центров. Сумма двух гипотенуз равна $5r$; значит, гипотенузы равны соответственно $\frac{5r}{4}$ и $\frac{15r}{4}$. Поэтому катеты равны $\sqrt{\frac{25}{16}r^2-r^2}=\frac{3r}{4}$ и $\frac{9r}{4}$, а длина касательной есть: $\frac{3r}{4}+\frac{9r}{4}=3r$.

Ответ: $r\sqrt{21}$ или $3r$.

Задача 7 (*МГУ, географич. ф-т, 1997*). В некоторый угол B вписаны две непересекающиеся окружности. Окружность большего радиуса касается сторон этого угла в точках A и C, меньшего – в точках A_1 и C_1. (Точки A и C_1 лежат на разных сторонах угла B). Прямая AC_1 пересекает окружности большего и меньшего радиусов в точках E и F соответственно. Найти отношение площадей треугольников ABC_1 и A_1BC_1, если $A_1B = 2$, $EF = 1$, а длина AE равна среднему арифметическому длин BC_1 и EF.

Решение. Во-первых, $AE = \dfrac{BC_1 + EF}{2} = \dfrac{A_1B + EF}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Т. к. треугольники, площади которых сравниваются, имеют два общих элемента (сторону BC_1 и угол B), искомое отношение площадей равно отношению длин других сторон, прилегающих к углу B: $\dfrac{S_{ABC_1}}{S_{A_1BC_1}} = \dfrac{AB}{A_1B} = \dfrac{2+x}{2}$



(здесь через x обозначена длина общей внешней касательной A_1A, которая, как мы уже выяснили, равна также длине C_1C). Для определения x запишем дважды теорему о секущей и касательной, исходящих из точек A и C_1: $AA_1^2 = AC_1 \cdot AF$ и $C_1C^2 = C_1A \cdot C_1E$.

Обозначив для удобства $C_1F = y$, данные соотношения можно переписать в виде: $x^2 = \left(y + \dfrac{5}{2}\right) \cdot \dfrac{5}{2}$, $x^2 = \left(y + \dfrac{5}{2}\right)(y+1)$. Из этой системы легко следует, что $y = \dfrac{3}{2}$ и $x^2 = 10$.

Обратите внимание на интересный факт – хорды общей секущей к разным окружностям, если эти окружности вписаны в общий угол, равны между собой: $C_1F = EA$.

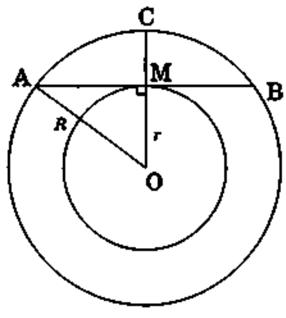
В результате $\dfrac{S_{ABC_1}}{S_{A_1BC_1}} = \dfrac{2+\sqrt{10}}{2} = 1 + \sqrt{\dfrac{5}{2}}$. **Ответ:** $1 + \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

4. Концентрические окружности

Ещё одним интересным классом задач на окружности являются задачи, в которых непересекающиеся окружности имеют общий центр. Отметим характерные свойства этой геометрической конструкции, рассмотрев несколько примеров.

Пример 4. В большем из двух концентрических кругов проведена хорда, равная 32 и касающаяся меньшего круга. Определить длину радиуса каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8.

Решение. Обозначим через O центр окружностей, через M — точку касания хорды AB с меньшей окружностью, через R и r — радиусы соответственно большего и меньшего кругов. По условию ширина образовавшегося кольца равна $MC=B-r=8$. Кроме того, в равнобедренном ΔOAB точка M является основанием высоты, проведённой из вершины O (следует из условия касания), а потому $AM = MB = 16$. При этом в прямоугольном ΔAMO: $R^2=r^2+16^2$. Из решения этой системы получаем $r=12, R=20$.



Ответ: 12, 20.

Задача 8 ***(МАИ, 1992).*** В окружность с центром в точке O вписан четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB=3$ см, $CD=4$ см. Другая окружность с тем же центром O делит сторону AB на три равные части. Найти длины отрезков, на которые эта окружность делит сторону CD.

Решение. Данные в условии две окружности как раз и есть концентрические окружности. Из того факта, что вторая окружность делит отрезок длины 3 на три равные части, можно получить связь между радиусом R первой окружности и радиусом r второй.

Для этого с помощью теоремы Пифагора запишем двумя способами квадрат расстояния от точки O до стороны AB: $R^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=r^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Отсюда $r^2=R^2-2$.

Аналогично, обозначив длину среднего из отрезков, на которые разбивается сторона CD, через $2x$, запишем квадрат расстояния от точки O до стороны CD: $R^2-4=r^2-x$. Подставив сюда $r^2=R^2-2$, получим: $x=\sqrt{2}$.

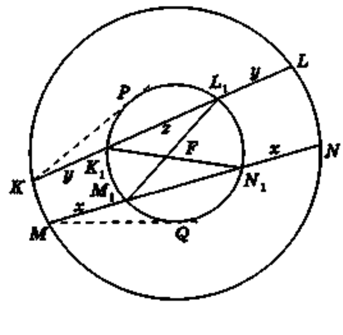
Поэтому средний из отрезков равен $2\sqrt{2}$, а два других равны $2-\sqrt{2}$ (обратите внимание на их равенство — оно не случайно!).

Ответ: $2-\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$.

Задача 9 (*МГУ, географич. ф-т, 1997*). Даны две концентрические окружности. В большей из них проведены две непересекающиеся хорды KL и MN, которые пересекают меньшую окружность в точках K_1, L_1 и M_1, N_1 соответственно (точки с индексом “1” расположены ближе к одноимённым точкам без индексов). Хорды K_1N_1 и L_1M_1 меньшей окружности пересекаются в точке F.

Найти отношение площадей треугольников K_1FL_1 и M_1FN_1, если $KL=5NN_1$, а длина хорды M_1N_1 равна среднему геометрическому длин отрезков KL и MM_1.

Решение. Несложно доказать (попробуйте сделать это самостоятельно) равенство отрезков хорд большей окружности, лежащих вне меньшего круга: $MM_1=N_1N=x$ и $KK_1=L_1L=y$. Для удобства мы сразу ввели переменные x и y, через которые будем выражать все остальные условия задачи. Обозначим, кроме того, $K_1L_1=z$. Тогда из условия следует, что $KL=5x=2y+z$, а $M_1N_1=\sqrt{5}x$.



Для того, чтобы выписать ещё одно соотношение между неизвестными x, y и z, отметим характерную для такой конфигурации особенность. Если провести из любой точки большей окружности касательную к меньшей окружности, то для всех точек большей окружности длина этой касательной будет одинакова. Это следует из равенства соответствующих прямоугольных треугольников с вершиной в точке касания, гипотенузой, равной радиусу большей окружности, и катетами, равными длине касательной и радиусу меньшей окружности. Поэтому, проведя из точек K и M касательные KP и MQ и записав для них теорему о касательной и секущей, получим $KP^2 = KL_1 \cdot KK_1 = MQ^2 = MN_1 \cdot MM_1$ или, используя введённые неизвестные, $(x+\sqrt{5}x)x=(y+z)y$. С учётом того, что $z=5x-2y$, это соотношение представляется в виде однородного уравнения: $y^2-5xy+(1+\sqrt{5})x^2=0$, решения которого $\frac{y}{x}=\frac{5\pm\sqrt{21-4\sqrt{5}}}{2}$.

Учитывая, что треугольники K_1FL_1 и M_1FN_1 являются подобными (обоснуйте самостоятельно), отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия, который, в свою очередь, равен отношению длин соответствующих сторон: $k=\frac{K_1L_1}{M_1N_1}=\frac{z}{\sqrt{5}x}=\frac{5x-2y}{\sqrt{5}x}=\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{y}{x}$. Этот коэффициент подобия будет положительным только при одном из решений однородного уравнения, а именно $k=\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5-\sqrt{21-4\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{21-4\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$. В итоге: $k^2=\frac{21-4\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{21-4\sqrt{5}}{5}$.

В следующих главах этой книги мы продолжим изучение планиметрии, правда, в несколько ином формате. Главным будет не изучение свойств геометрических объектов, а приобретение опыта и навыков в решении конкретных задач. А пока закрепите изученный материал.

Задачи для самостоятельного решения

1. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 1 и 3, соответственно, касаются внешним образом в точке A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку A, пересекает в точке B другую их общую касательную C_1C_2, где C_1 и C_2 — соответствующие первой и второй окружностям точки касания с прямой. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников C_1AC_2 и O_1BO_2.

2. Окружности радиусами 1, 2 и 3 с центрами соответственно в точках O_1, O_2 и O_3 касаются внешним образом в точках A, B и C. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

3. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной квадрата. Определить расстояние между центрами окружностей.

4 *(МГУ, экономич. ф-т, 1980)*. На плоскости даны две окружности радиусов 12 и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка O_1O_2 равно $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Вычислить длину отрезка M_1M_2.

5 *(Моск. гос. ун-т прикл. биотехнологии, 1994)*. Две окружности радиусом 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и отрезка O_1O_2.

6. Две окружности — одна радиуса 2 с центром в точке O_1, другая радиуса 4 с центром в точке O_2 — расположены внутри третьей окружности и касаются с ней внутренним образом в точках A и B соответственно. При этом касательные к третьей окружности, проведенные через точки A и B пересекаются в точке D так, что $\angle ADB = 120°$. Известно также, что первые две окружности касаются между собой внешним образом. Через точки B и O_2 проведена прямая, пересекающая третью окружность в точке C. Определить: а) величину угла ACB; б) радиус третьей окружности; в) площадь фигуры AO_1O_2BD.

7 *(ИСАА МГУ, 1999)*. Окружности радиусом 2 и 6 с центрами соответственно в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая

внутренняя касательная; эти касательные пересекаются в точке D. Найти радиус вписанной в треугольник O_1O_2D окружности.

8 *(МГУ, биологич. ф-т, 1978)*. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\pi/3$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

9 *(МГУ, химич. ф-т, 1991)*. Две окружности разных радиусов касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от неё. Отрезок AB — диаметр меньшей окружности. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что длина отрезка MK равна $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, а угол BMA равен $15°$. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.

10 *(МГУ, биологич. ф-т, 1976)*. Дана трапеция $ABCD$, сторона AB которой перпендикулярна основаниям BC и AD. На стороне AB как на диаметре построена окружность радиуса $\sqrt{6}$, которая касается CD. Другая окружность радиуса $\sqrt{2}$ касается сторон AD и CD и пересекается с первой окружностью, имея с ней общую хорду длины $\sqrt{6}$. Центры обеих окружностей расположены по разные стороны от общей хорды. Найти площадь трапеции $ABCD$.

ГЛАВА 4. ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Итак, Вы теперь знаете всё или почти всё для того, чтобы, не боясь, взяться за решение планиметрической задачи практически любой сложности. Если Вы хорошо усвоили основы геометрии, изложенные в предыдущих главах, запомнили ключевые геометрические факты, научились видеть знакомые планиметрические модули и схемы, то, безусловно, решение задачи должно получиться. Однако, как мы уже не раз отмечали ранее, две трети успеха в геометрии — это опыт. Геометрическая интуиция формируется со временем, и чем больше задач Вы решите, тем больше вероятность того, что в очередной задаче Вам улыбнётся удача.

В этой и следующей главах мы приводим более 300 задач, большинство которых предлагалось в течение последних десяти лет на вступительных экзаменах в различные российские вузы, а также на Централизованном тестировании и Едином государственном экзамене. Подборка этих задач не случайна. С одной стороны, мы хотели дать Вам возможность полностью повторить пройденное, уже в произвольной последовательности применяя основные планиметрические теоремы. С другой — мы отбирали задачи по степени их полезности с учетом повторяемости наиболее значимых геометрических блоков. Решение задач в таком формате очень эффективно в процессе обучения. Самые сложные задачи отмечены «звёздочкой» — *.

Все задачи этой главы снабжены ответами и указаниями. Однако имейте в виду, что в решения задач и ответы следует заглядывать только тогда, когда исчерпаны возможности по самостоятельному решению или же когда Вы уверены, что задача решена и нужно просто свериться с авторами.

1. Московский гос. университет пищевых производств, 2000

В прямоугольном треугольнике сумма сторон 48, а сумма квадратов сторон 800. Найти квадрат разности катетов.

2. Воронежский гос. архитектурно-строит. университет, 2003

Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а площадь его равна 24 см^2. Найти площадь описанного круга.

3. Обнинский институт атомной энергетики, 2000

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из прямого угла, равна 13, тангенс меньшего из острых углов равен 2/3. Найдите высоту, проведенную из прямого угла.

4. Пермский гос. технич. университет, 2002

В треугольнике ABC известны углы $\angle ABC = 60°$ и $\angle ACB = 90°$, а точка D разбивает гипотенузу на части $AD = 1$ и $DB = 3$. Длина отрезка CD равна: 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{7}:\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{5}$; 5) 2.

5. Сыктывкарский гос. университет, 2003

Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника, периметры которых равны p и q. Найдите стороны треугольника.

6. Московский гос. университет пищевых производств, 2002

В прямоугольном треугольнике отношение катетов равно 1,5, а радиус описанной окружности равен $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Найти площадь треугольника.

7. Российский гос. аграрный университет — МСХА им. К.А. Тимирязева, 2006

В прямоугольном треугольнике длина одного из катетов равна 5 см, а длина радиуса вписанной окружности равна 2 см. Найдите длину другого катета.

8. Московская гос. академия водн. транспорта, 2006

Найти катеты прямоугольного треугольника, если их отношение равно $\frac{5}{12}$, а радиус вписанной в треугольник окружности равен r.

9. Пермский гос. технич. университет, 2003

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 5, а радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 2. Периметр этого треугольника равен:

1) 24; 2) 14; 3) 22; 4) 20; 5) 18.

10. Российский гос. аграрный университет — МСХА им. К.А. Тимирязева, 2004

Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника ABC делит катет на отрезки длиной 10 см и 26 см. Найдите площадь треугольника ABC.

11. Московский авиационный институт (гос. технич. ун-т) МАИ, 2005

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки D и E так, что CD — высота, $\angle ACE = \angle DCE$. Найти площадь треугольника ABC, если $CD = 4$ см, $DE = 3$ см.

12. Московский гос. технологич. университет «СТАНКИН», 2005

Площадь прямоугольного треугольника ABC равна $2\sqrt{5}$, длина катета BC равна 1. На гипотенузе AB взята точка F так, что $18BF = AB$. Перпендикуляр к AB, проведенный в точке F, пересекает прямую BC в точке D. Найти длину отрезка OD, где точка O — середина AB.

13. Военный университет радиационной, химич. и биологич. защиты, 2000

Вычислить углы прямоугольного треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию.

14. МГУ. Ф-ты: химический; наук о материалах; физико-химический; биологический; биоинженерии и биоинформатики; фундаментальной медицины; географический; психологии, 2003

В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу опущены медиана AM и высота AH. Известно, что $AH = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$ и $\cos\angle MAH$ равен $\dfrac{12}{13}$. Найти длины катетов треугольника ABC.

15. Российский гос. гуманитарный университет (РГГУ), 2000

Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найти величины его острых углов. Во сколько раз периметр треугольника больше разности арифметической прогрессии?

16. МГУ. Ф-т государственного управления, 2003

В прямоугольном треугольнике KLM проведен отрезок MD, соединяющий вершину прямого угла с точкой D на гипотенузе KL так, что длины отрезков DL, DM и DK различны и образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}$, причем $DL = 1$. Найдите величину угла KMD.

17. Междунар. университет природы, общества и человека «Дубна», 2006

В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

18. Смоленский гос. педагогич. университет, 2004

В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 100 см, вторая — 40 см. Какая из них служит основанием?

19. Московское высшее военное командное училище, 2004

В равнобедренном треугольнике величина угла при вершине равна $120°$, а площадь треугольника равна $4\sqrt{3}$ см^2. Найти длину высоты, опущенной на основание.

20. Красноярская гос. архитектурно-строит. академия, 2001

Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна h и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найти площадь треугольника.

21. МГУ. Филологический ф-т, 2003

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найти все углы треугольника ABC и его основание AC, если площадь четырехугольника $NBMD = 4$.

22. МГУ. Филологический ф-т, 2005

Биссектриса MN угла KML при основании ML равнобедренного треугольника KML делит сторону KL так, что $KN = ML$. Найти биссектрису MN и периметр треугольника KML, если $ML = 4$.

23. Московский гос. университет инженерной экологии, 2001

Найти расстояние (в см) между точкой пересечения биссектрис внутренних углов равнобедренного треугольника с основанием $a = 10$ см и боковой стороной $b = 13$ см и точкой пересечения высот этого треугольника.

24. Сибирский гос. университет путей сообщения (Новосибирск), 2001

Внутри равнобедренного треугольника ABC с равными сторонами AB и AC и углом $BAC = 80°$ взята точка M, такая что угол $MBC = 30°$, угол $MCB = 10°$. Найти величину угла AMC.

25. МГУ. Высшая школа бизнеса, 2003

В равнобедренном треугольнике KLM углы при основании KM равны $50°$, а точка O внутри треугольника расположена так, что $\angle OKL = 20°$, а $\angle OML = 40°$. Найдите величину угла KOL.

26. МГУ. Химический ф-т и Ф-т наук о материалах, 2001

В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найти длину AD, если $CE = 2$.

27. Кабардино-Балкарский гос. университет (Нальчик), 2002

В треугольнике ABC угол A равен $45°$, а угол B равен $120°$. Из вершины C проведена высота CH. Найти квадрат отношения площади треугольника CHA к площади треугольника CHB.

28. Московский гос. университет дизайна и технологии, 2001

Стороны треугольника равны 25, 24 и 7. Определить отношение площадей вписанного и описанного относительно этого треугольника кругов.

29. Централизованное тестирование, 2003

В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60°$ и сторонами $AC = 8$ и $BC = 4\sqrt{3}$ синус угла при вершине C равен: 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

30. Сибирский гос. индустриальный университет (Новокузнецк), 2003

В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B. По данным сторонам b и c найти a.

31. Московский гос. университет природообустройства, 2000

В треугольнике длина большей стороны равны 14, а меньшей — 6. Найти величину тупого угла этого треугольника, если длина медианы, проведенной из вершины тупого угла, равна $\sqrt{19}$.

32. МГУ. Биологический ф-т, Ф-т фундаментальной медицины, 2000

Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$. Точка D лежит на стороне AB, о точка E — на стороне AC, причём $AD = 2$, $AE = 3$. Найти площадь треугольника ADE.

33. МГУ. Географический ф-т, 1986

Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что $AK = 1$, $KC = \sqrt{3}$, а величины углов AKC, ABK и KBC равны 120^0, 15^0 и 15^0 соответственно. Найти длину отрезка BK.

34. Московская гос. академия тонкой химич. технологии (МИТХТ), 2001

В треугольнике ABC точка E — середина медианы BD. Прямая AE пересекает сторону BC в точке F. Найти CF, если $BF = 8$.

35. Московский гос. технологич. университет «СТАНКИН», 2002

В треугольнике ABC: $AB = BC$. На стороне BC взята точка E так, что $BE : EC = 3$. На продолжении стороны AC взята точка K так, что $AK : KC = 0{,}2$. Отрезок KE пересекает сторону AB в точке M. Найти отношение длин отрезков AM и AB.

36. МГУ. Географический ф-т, 2002 (май)

В треугольнике ABC точки E и F являются серединами сторон AB и BC соответственно. Точка G лежит на отрезке EF так, что $EG : AE = 1 : 2$ и $FG = BE$. Найти: а) отношение площадей треугольников ABG и AGC; б) $\angle GCA$, если $\angle AGC = 90^0$.

37. Московский гос. университет путей сообщения (МИИТ), 2001

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CK. Известно, что $AC = 5$ см, $AK = 5/3$ см, $DC = 5/2$ см. Найти радиусы вписанной в треугольник и описанной вокруг треугольника ABC окружностей.

38. МГУ. Географический ф-т, 1999 (май)

В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. Величина угла LFA равна 60^0.

1) Найти величину угла ACB. 2) Вычислить площадь треугольника ABC, если $\angle CLD = 45^0$ и $AB = 2$.

39. Московский авиационный институт (гос. технич. ун-т) МАИ, 2004

Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки 2 см и 3 см. Найти площадь треугольника, если один из его углов равен 120^0.

40. МГУ. Географический ф-т, 2003 (май)

В треугольнике PQR проведены медиана QA и биссектриса QB. Известно, что $\angle PQA = \dfrac{3\pi}{4}$, $\angle RQA = \dfrac{\pi}{6}$, $RB = 4$. Найти AB.

41. МГУ. Мех-мат, 2003 (март)

На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$. Найти площадь треугольника ABC. Какова наименьшая площадь треугольника BDC при данных условиях?

42. Новосибирский гос. университет, 2003

В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $CP = 5$, $PM = 3$.

43. Междунар. университет природы, общества и человека «Дубна», 2004

В треугольнике ABC: $AB = 4$ см, $AC = 6$ см и $BC = 5$ см. Точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $BM : AB = 1 : 4$ и $BN : BC = 2 : 5$. Найдите длину отрезка MN, а также определите, в каком отношении он делит медиану BD.

44. Кабардино-Балкарский гос. университет (Нальчик), 2001

В треугольнике ABC проведены медианы AD и CE. Известно, что $AD = 5$, $\angle DAC = \frac{\pi}{8}$, $\angle ACE = \frac{\pi}{4}$. Найти утроенную площадь треугольника ABC.

45. МГУ. Физический ф-т, 2006

В ΔLMN дано: $LN : NM = 7 : 3$, расстояние от середины биссектрисы NK до стороны NM равно $3/2$, площадь ΔLMN равна 30. Найти LN.

46. Московский авиационный институт (гос. технич. ун-т) МАИ, 2002

В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. Найти площадь четырехугольника $ABHM$, если известно, что $AH = BM = 1$ см.

47*. Московский физико-технический институт (гос. ун-т) (МФТИ), 2001

В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 4$ и $AC = 2$, проведены биссектриса AA_1, медиана BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых: 1) AC, AA_1 и CC_1; 2) AA_1, BB_1 и CC_1.

48*. МГУ. Мех-мат, 2004

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, а медианы в точке O. Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH. Найти площадь треугольника ABC, если $BC = 2$, а разность углов B и C равна 30°.

49. МГУ. Экономический ф-т, 2000

Точка Q расположена на стороне MN треугольника LMN так, что $NQ{:}QM = 1{:}2$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки Q вершина L переходит в вершину N, а вершина M — в точку P, лежащую на продолжении стороны LM за точку L. Найти углы треугольника LMN.

50. МГУ. Московская школа экономики, 2006

Треугольник KLM, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию, вписан в окружность радиуса $\frac{21}{\sqrt{3}}$. Найдите периметр треугольника, если он меньше 60 и $KM = 21$.

51. МГУ. Биологический ф-т, Ф-т фундаментальной медицины, 2001

В треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна — на стороне AB и одна — на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке M. Найти площадь треугольника DMC.

52. Московский гос. университет инженерной экологии, 2000

В равнобедренный треугольник с основанием $b = 8$ см и высотой, опущенной на основание, $h = 5$ см вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах треугольника. Найти площадь прямоугольника (в см^2).

53. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2001

Длина одной из сторон треугольника равна a, а противолежащий угол равен φ, причем $\cos\frac{\varphi}{2} = p$. Чему равен наибольший возможный периметр треугольника? $a=8$, $p=\frac{\sqrt{21}}{5}$.

54. Вологодский гос. педагогич. университет, 2001

Построить треугольник, зная угол A, прилежащую к нему сторону b и радиус вписанной окружности r.

55. ЕГЭ, 2007

Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

56. МГУ. Химический ф-т, Ф-т наук о материалах и Физико-химический ф-т, 2006

Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $KLMN$ образуют четырёхугольник $PQRS$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найти разность сторон KL и LM, если сумма квадратов всех сторон четырёхугольника $PQRS$ равна $\frac{7}{2}$.

57. Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова, 2003

На сторонах MN и NP параллелограмма $MNPQ$ взяты точки A и B такие, что $BN:BP = 5:3$ и $AO:OQ = 3:8$, где O – точка пересечения отрезков AQ и BM. В каком отношении точка A делит сторону MN?

58. Централизованное тестирование, 2003

На продолжении стороны CD параллелограмма $ABCD$ взята точка E, а отрезки AE и BC пересекаются в точке F. Если $AF : FE = 3 : 7$, то прямая AE делит площадь параллелограмма $ABCD$ в отношении: 1) $3 : 20$; 2) $3 : 10$; 3) $9 : 49$; 4) $3 : 7$; 5) $3 : 17$.

59. Московский энергетический институт (технич. ун-т) МЭИ, 2003

В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A заданы длины сторон: $AB = 4\sqrt{2}$ см, $BC = 6$ см. Найти длины диагоналей параллелограмма, если радиус окружности, описанной около треугольника ABD, равен $\sqrt{10}$ см.

60. МГУ. Ф-т вычислительной математики и кибернетики, 2006

В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки C и прямых CD и AC соответственно равны 13, 6 и 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

61. Военный университет радиационной, химич. и биологич. защиты, 2000

Площадь равнобочной трапеции, в которую вписана окружность, равна 64. Найти радиус окружности, если угол при основании трапеции равен $\frac{\pi}{6}$.

62. Балтийский гос. технич. университет «Военмех» (Санкт-Петербург), 2000

В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 11, $AB = BC = CD = 5$. Найти расстояние от середины боковой стороны AB до прямой, проходящей через точки C и D.

63. Гос. университет — Высшая школа экономики, 2000

В равнобедренной трапеции с высотой $2-\sqrt{2}$ и углом $\pi/4$ между ее диагоналями, противолежащим боковой стороне, средняя линия равна: 1) $\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) 2; 4) $3\sqrt{2}-4$; 5) $\sqrt{2}+2$.

64. Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова, 2002

Высота прямоугольной трапеции в три раза больше меньшего основания, а большее основание равно 5. Найти площадь трапеции, если ее меньшая диагональ является биссектрисой угла при меньшем основании.

65. Московский гос. текстильный университет им. А.Н. Косыгина, 2001

Найти площадь прямоугольной трапеции, если меньшая боковая сторона равна 12, а диагональ перпендикулярна боковой стороне и равна 15.

66. Московский гос. университет дизайна и технологии, 2000

Косинус острого угла прямоугольной трапеции равен 0,8, а ее меньшая боковая сторона равна 4. Найти периметр трапеции, если ее диагональ перпендикулярна боковой стороне.

67. Череповецкий гос. университет, 2001

Периметр прямоугольной трапеции с острым углом 30° равен 24. Найти наибольшую площадь трапеции.

68. МГУ. Биофак, Ф-т наук о материалах, Ф-т биоинжен. и биоинформ., Ф-т фундам. медицины, 2005

Диагонали трапеции равны 13 и 3, а сумма длин оснований равна 14. Найти высоту трапеции.

69. Московский энергетический институт (технич. ун-т) МЭИ, 2006

В трапеции, большее основание которой равно 15 см, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Длина отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции, равна 12 см. Найти высоту трапеции, если её площадь равна 50 см^2.

70. МГУ. Географический ф-т, 2005

Произведение средней линии трапеции и отрезка, соединяющего середины её диагоналей, равно 25. Найти площадь трапеции, если её высота втрое больше разности оснований.

71. МГУ. Физический ф-т, 2003

В трапеции $BCDE$ ($CD \| BE$) точка M — середина отрезка BC, EM — биссектриса $\angle DEB$, $EM = 4$, $CD + BE = 5$. Найти DM.

72. МГУ. Физический ф-т, 2006

В трапеции $PQRS$ ($QR \| PS$) $PQ \neq RS$. Две прямые, параллельные основаниям QR и PS, делят трапецию на 3 части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиус наименьшей из этих окружностей в 2 раза меньше радиуса средней окружности. Найти отношение радиуса наибольшей из этих окружностей к радиусу наименьшей.

73. МГУ. Мех-мат, 1994

В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведённая в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF.

74. МГУ. Географический ф-т, 2003

Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $PQRS$, перпендикулярны. Известно, что $S_{PQRS} = 2, \angle PRS + \angle QSR = 15°$. Найти квадрат длины отрезка PR и сравнить результат с числом $4\sqrt{15}$.

75. МГУ. Биологический ф-т, 1993

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найдите величину угла, образованного продолжением сторон AB и CD.

76. Башкирский гос. университет (Уфа), 2003

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площади треугольников ABE и CDE равны, а сумма площадей треугольников BEC и AED не превосходит удвоенной площади треугольника ABE. Найти длину стороны BC, если длина стороны AD равна 4.

77. МГУ. Экономический ф-т, 1994

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $CK:KM=2:1$, $CD:DK=5:3$ и $\angle ABD+\angle ACD=180^\circ$. Найдите отношение стороны AB к диагонали AC.

78. МГУ. Институт стран Азии и Африки, 2005

В выпуклом четырёхугольнике с вершинами в точках A, B, C, D заданы длины отрезков $AD=2\sqrt{2}$, $AB=2(\sqrt{3}+1)$, $BC=2\sqrt{3}$. Величины углов DAB и ABC равны $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно. Вычислите все углы четырёхугольника.

79. Петербургский гос. университет путей сообщения (ЛИИЖТ), 2001

Все стороны выпуклого 4-угольника меньше 1. Докажите, что площадь этого 4-угольника также меньше 1.

80. Московский авиационный институт (гос. технич. ун-т) МАИ, 2002

Величины углов вписанного в окружность четырёхугольника, взятые в некотором порядке, являются последовательными членами убывающей арифметической прогрессии. Найти возможные значения суммы первых двух членов этой прогрессии.

81. ЕГЭ, 2004

Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

82. МГУ. Химический ф-т, 2005

Найти число n сторон выпуклого n-угольника, если каждый его внутренний угол не меньше 151° и не больше 153°.

83. Обнинский институт атомной энергетики, 2000

В круге с центром O проведена хорда AB. Точка M делит её на отрезки AM и BM, $AM = 4$, $BM = 6$. Найдите радиус круга, если $OM = 5$.

84. Московский гос. индустриальный университет, 2000

Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

85. МГУ. Ф-т фундаментальной медицины, 2003 (май)

Из точки A, находящейся вне окружности с центром O, проведены две касательные AB и AC (B и C – точки касания). Отрезок AO пересекается с окружностью в точке D и с отрезком BC в точке F. Прямая BD пересекает отрезок AC в точке E. Известно, что площадь четырёхугольника $DECF$ равна площади треугольника ABD. Найти угол OCB.

86. Московский гос. технологич. университет «СТАНКИН», 2001

Длина окружности с центром в точке O равна 50π. Точки A и B расположены на расстоянии 26 и 40 соответственно от точки O. Длина хорды, лежащей на прямой AB равна 14. Найти площадь треугольника AOB.

87. МГУ. Физический ф-т, 1995

В окружности проведены диаметр MN и хорда AB, параллельная диаметру MN. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $MP = p$, $MQ = q$. Найти MN.

88. МГУ. Мех-мат, 2007

Точки A, B, C лежат на окружности радиуса 4 с центром O, а точка M — на прямой, касающейся этой окружности в точке B, причём $\angle AMC = 42^\circ$, а длины отрезков AM, BM, CM образуют убывающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке).

Найти угол AMO и расстояние между точками A и C. Какой из углов больше: AOM или ACM?

89. Московский энергетический институт (технич. ун-т) МЭИ, 2002

В угол величины $60°$ вписана окружность радиуса 30 мм. Между вершиной угла и центром окружности проведена к этой окружности касательная, перпендикулярная биссектрисе данного угла. Найти площадь отсечённого треугольника.

90. МГУ. Физический ф-т, 1997 (май)

На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3 \cdot OA$ от прямой OA, а на луче OA – точка N на расстоянии $3 \cdot OB$ от прямой OB. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 3. Найти MN.

91. Московский гос. технич. университет «МАМИ», 2000

Две окружности радиусов r и $2r$ касаются друг друга внутренним образом. Хорда окружности большего радиуса перпендикулярна линии центров и делится меньшей окружностью на 3 равные части. Найти длину хорды.

92*. МГУ. Мех-мат, 2000

Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найти длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

93*. МГУ. Ф-т вычислительной математики и кибернетики, 2004

Окружность с центром в точке M касается сторон угла AOB в точках A и B. Вторая окружность с центром в точке N касается отрезка OA, луча BA и продолжения стороны угла OB за точку O. Известно, что $ON : OM = 12 : 13$. Найдите отношение радиусов окружностей.

94. МГУ. Институт стран Азии и Африки, 2004

Два круга, расстояние между центрами которых равно $\sqrt{3}$, имеют радиусы $\sqrt{3}$ и 3. Найдите отношение площади круга, вписанного в общую часть данных кругов, к площади общей части.

95. МГУ. Экономический ф-т, 2002

Докажите или опровергните следующее утверждение: круг площадью $\frac{25}{8}$ можно поместить внутрь треугольника со сторонами 3, 4 и 5.

96. МГУ. Социологический ф-т, 2004

В треугольнике ABC угол при вершине B равен $\frac{\pi}{2}$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами A и C, равны 3 и $\sqrt{2}$ соответственно. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

97. Московский гос. университет дизайна и технологии, 2002

В окружность радиуса $\sqrt{3}$ вписан прямоугольный треугольник так, что один из катетов в $\sqrt{3}$ раз ближе к центру, чем другой. Определить больший катет.

98. Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова, 2000

В треугольник ABC площадью $270\sqrt{3}$ вписана окружность, которая касается сторон BC и AC соответственно в точках M и H. Найти периметр треугольника, если $BM : MC = 3 : 5$ и $AH : HC = 2 : 1$.

99. МГУ. Экономический ф-т, 2005

Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K, N и M. Известно, что в треугольнике KNM углы $\angle N$ и $\angle M$ равны соответственно 60° и 75°, а произведение всех его сторон равно $9(1+\sqrt{3})$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

100. Междунар. университет природы, общества и человека «Дубна», 2003

Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $5\sqrt{21}$ см. Биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите длину стороны AB, если $BD : CD = 5 : 4$, $BO : EO = 5 : 2$.

101. Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова, 2003

Средняя линия длины l треугольника ABC лежит на диаметре описанной окружности радиуса 2. Найти площадь треугольника.

102. МГУ. Экономический ф-т, 2006

В треугольнике DCB угол C — тупой. Описанная около треугольника DCB окружность радиуса R пересекает высоту DA в точке

E так, что $ED = EC$. Известно, что периметр треугольника BCE равен $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}+6}{2}$ и $\angle DEB = 105°$. Найдите R.

103. МГУ. Географический ф-т, 2002

В треугольнике KLM проведена медиана LN. Известно, что $\angle KLM = \angle LNM$, $KM = 10$. Найти: а) сторону LM;
б) $\angle LMK$, если расстояние от точки M до центра описанной около треугольника KLN окружности равно 10.

104. МГУ. Физический ф-т, 2003

В ΔBCD точка O — центр вписанной окружности, $\angle C = \beta$. Прямая CO пересекает окружность, описанную около ΔBCD, в точке A, $OA = a$. Найти радиус окружности, описанной около ΔBCD.

105. МГУ. Ф-т психологии, 2002

На катете ML прямоугольного треугольника KLM как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону KL в точке P. На стороне KM взята точка R так, что отрезок LR пересекает окружность в точке Q, причём отрезки QP и ML параллельны. Известно, что $KR = 2RM$ и $ML = 8\sqrt{3}$. Найти MQ.

106. Балтийский гос. технич. университет «Военмех» (Санкт-Петербург), 2001

Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника. В ответ записать длину большего отрезка.

107. Московский физико-технический институт (гос. ун-т) (МФТИ), 2000

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти длину отрезка CD, если $\angle ABC = 2\arcsin(1/5)$, а радиус окружности $R = 5$.

108. Междунар. университет природы, общества и человека «Дубна», 2005

В треугольнике ABC известно, что $|AB| = |BC| = 6$ см. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $|BD| : |DC| = 2 : 1$. Найти длину основания AC.

109. МГУ. Олимпиада «Ломоносов», 2007

На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найти AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

110. Московский технич. университет связи и информатики МТУСИ, 2001

В остроугольном треугольнике ABC на BC как на диаметре построена окружность, пересекающая AB и AC соответственно в точках N и M, причем $MN = 7$, $BC = 14$. Найдите радиус вписанной окружности, если площадь треугольника ABC равна $24\sqrt{3}$.

111. МГУ. Мех-мат, 1991

Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Из точки D радиусом, равным AD, описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислить длину стороны AC, если заданы длины отрезков $AB = c$, $AM = n$, $AN = m$.

112. МГУ. Химический ф-т и Ф-т наук о материалах, 2002

Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC. Точки D и E — точки касания. На окружности взята произвольная точка F, отличная от D и E. Из точки F опущены перпендикуляры FG, FH, FK на стороны AD, AE, DE соответственно. Найти площадь треугольника GKF, если известны длины отрезков $FK = 6$, $FH = 9$ и угол $\angle BAC = 60°$.

113. МГУ. Ф-т почвоведения, 1994 (май)

Через точку C проведены две прямые, касающиеся заданной окружности в точках A и B. На большей из дуг AB взята точка D, для которой $CD = 2$ и $\sin\angle ACD \cdot \sin\angle BCD = 1/3$. Найти расстояние от точки D до хорды AB.

114. МГУ. Экономический ф-т, 2004

Окружность, пересекающая боковые стороны AC и CB равнобедренного треугольника ACB соответственно в точках P и Q, является описанной около треугольника ABQ. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке D так, что $AQ : AD = 4:3$. Найдите площадь треугольника DQB, если площадь треугольника PQC равна 3.

115. МГУ. Мех-мат, 2006

Отрезок AL является биссектрисой треугольника ABC. Окружность радиусом 3 проходит через вершину A, касается стороны BC в точке L и пересекает сторону AB в точке K. Найти угол A и площадь треугольника ABC, если $BC = 4$, $AK : LB = 3 : 2$.

116*. МГУ. Ф-т вычислительной математики и кибернетики, 2002

Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Окружность радиуса 35, центр которой лежит на прямой BC, проходит через точки A и D. Известно, что $AB^2 - AC^2 = 216$, а площадь треугольника ABC равна $90\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

117. МГУ. Мех-мат, 2003

Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$. Сравнить площади треугольников ABC и ABF.

118. МГУ. Мех-мат, 2001

Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причём $BE = 9$. Найти диагональ BD.

119. Ярославский гос. педагогич. университет им. К.Д. Ушинского, 2002

Чему равна длина окружности, вписанной в равнобокую трапецию с основаниями 2 и 8?

120. ЕГЭ, 2004

В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

121. Альметьевский нефтяной институт, 2002

Найти квадрат боковой стороны равнобочной трапеции, описанной около круга, если известно, что площадь трапеции равна 25, а угол при основании равен $\pi/6$.

122. Волгоградская гос. архитектурно-строительная академия, 2002

В прямоугольную трапецию вписана окружность, центр которой удален от концов боковой стороны на расстояния 8 и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.

123. МГУ. Ф-т психологии, 2003

В окружность диаметра $3\sqrt{3}$ вписана трапеция с большим основанием 3. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям трапеции хорда окружности длины 5. Найти длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

124*. МГУ. Ф-т вычислительной математики и кибернетики, 2001

Трапеция с основанием $\sqrt{8}$ и высотой $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ вписана в окружность радиуса $\sqrt{5}$. Каждый из четырёх отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражён внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отражённых внутрь неё сегментов.

125. Централизованное тестирование, 2003

Если окружность, проходящая через вершины A, B и D трапеции $ABCD$ с основанием $BC = 5$ и диагональю $BD = 8$, касается прямых BC и CD, то основание AD равно:

1) $64/5$; 2) $\sqrt{40}$; 3) 8; 4) 11; 5) $\sqrt{89}$.

126. МГУ. Географический ф-т, 2006

Периметр трапеции $ABCD$ равен 46. Окружность пересекает основание AB в точках K и L, сторону BC — в точках M и N, основание CD — в точках P и R, сторону AD — в точках S и T, причем $AK < AL$, $CN < CM$, $CP < CR$, $AT < AS$, $KL = MN = 1$, $PR = ST = 7$, $AT = 3$, $CP = \frac{1}{2}$. Найти основания трапеции.

127*. МГУ. Мех-мат, 2005

На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найти BC, если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найти все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

128. МГУ. Социологический ф-т, 2003

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Радиус окружности равен 2, сторона AB равна 3. Диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Найти CD.

129. МГУ. Мех-мат, 2002

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причём $BX \parallel CD$ и $CX \parallel BA$. Найти BC, если $AX = \frac{3}{2}$ и $DX = 6$.

130. МГУ. Экономический ф-т, 2003

Площадь четырёхугольника $PQRS$ равна 48. Известно, что $PQ = QR = 6$, $RS = SP$ и ровно три вершины P, Q и R лежат на окружности радиуса 5. Найдите длины сторон RS и SP.

131. Омский гос. технич. университет, 2004

На плоскости даны точки: $M(-2;0)$, $N(10;4)$, $K(6;3)$ и $L(1;1)$. На одной прямой лежат только: А) M, N, K; Б) M, N, L; В) N, K, L; Г) M, K, N, L; Д) среди приведенных ответов нет правильного.

132. Ярославский гос. педагогич. университет им. К.Д. Ушинского, 2002

На плоскости задан треугольник с вершинами $A(1,2)$, $B(3,3)$ и $C(7,7)$. Найти длину его медианы AM.

133*. Московский авиационный институт (гос. технич. ун-т) МАИ, 2000

На координатной плоскости Oxy расположен треугольник, высота которого принадлежит оси абсцисс, биссектриса лежит на прямой $y=2x$, а медиана принадлежит прямой $y = kx$. Найти величину углового коэффициента k, если известно, что $k < 0$.

134. МГУ. Высшая школа бизнеса, 2003

Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если известны координаты двух его противоположных вершин $A\ (-2;\ 1)$, $C\ (6;\ -1)$ и точки $M\ (2;\ -2)$, являющейся серединой стороны AB.

135. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2003

$ABCD$ — трапеция, у которой нижнее основание AD в 3,5 раза длиннее верхнего BC. Найдите координаты точки C, если известно, что $A\left(0{,}5;0{,}5\right)$, $B\left(4;2{,}5\right)$, $D\left(11;-3\right)$.

136. Санкт-Петербургский гос. электротехнич. университет «ЛЭТИ», 2006

В равнобедренной трапеции $KLMN$ даны координаты вершин $K\left(-6;1\right)$, $L\left(-4;2\right)$ и $N\left(-2;-2\right)$. MN — боковая сторона трапеции. Найти координаты вершины M.

137. МГУ. Экономический ф-т, 2001

На координатной плоскости заданы точки A (0; 2), B (1; 7), $C\left(10;7\right)$ и D (7; 1). Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E — точка пересечения прямых AC и BD.

138. Волгоградская гос. архитектурно-строительная академия, 2002

Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1,-2)$ и B (4, 10).

139. Санкт-Петербургский гос. электротехнич. университет «ЛЭТИ», 2005

Даны векторы $\vec{a}\{-1;-1\}$ и $\vec{b}\{3;-1\}$. Найти угол между векторами $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$ и $\vec{b}$.

140. Санкт-Петербургский гос. электротехнич. университет «ЛЭТИ», 2003

Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\left(5\vec{b}+\vec{c}\right)$, если известно, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\arccos\left(-\dfrac{7}{11}\right)$, вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$, а длина вектора $\left(5\vec{b}+\vec{c}\right)$ в 7 раз больше длины вектора $\vec{b}$.

ГЛАВА 5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи этой главы снабжены только ответами. При их решении помощниками будут Ваши собственные эрудиция и сообразительность. Однако уровень сложности большинства приведённых задач, по нашему мнению, вполне доступен изучившему наше пособие. Надеемся, что успехи в их решении, подвигнут Вас к дальнейшему самостоятельному более углублённому изучению геометрии.

Успехов Вам!

1. Красноярский гос. технич. университет, 2002

В следующее высказывание: «Точка пересечения биссектрис треугольника является ...» вставьте нужную по смыслу фразу: а) центром описанной окружности; б) центром вписанной окружности; в) центром тяжести треугольника; г) ортоцентром треугольника.

2. Красноярский гос. технич. университет, 2000

Какая из следующих троек чисел может представлять собой стороны треугольника: 1) (12, 17, 22); 2) (12, 31, 50); 3) (7, 20, 33); 4) (10, 24, 38); 5) (11, 28, 45)?

3. Ульяновское высшее авиационное училище гражданской авиации, 2005

Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $6\sqrt{2}$. Найти его периметр.

4. Российский гос. профессионально-педагогич. университет (Екатеринбург), 2003

В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна 10 см, а один из острых углов — 30°. Найти периметр треугольника.

5. Пермский регионал. институт педагогических информационных технологий, 2000

В прямоугольном треугольнике с острым углом α гипотенуза равна $\sqrt{2}$. Сумма катетов составляет:

$$1)\ \sqrt{2}\sin^2\frac{\alpha}{2};\ 2)\ \sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2};\ 3)\ 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);\ 4)\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);\ 5)\ 2\cos 2\alpha.$$

6. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2003

В прямоугольном треугольнике известна длина катета, равная 60, и длина гипотенузы, равная 75. Вычислить площадь треугольника: 1) 800; 2) 1500; 3) 2250; 4) 2700; 5) 1350.

7. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2003

В прямоугольном треугольнике ABC: $\angle B = 90^\circ$, катет $AB = 3$, $\cos\angle A = \frac{3}{5}$. Найти катет BC. 1) 1,5; 2) 6; 3) 5; 4) 4; 5) 1,8.

8. МГУ. Филологический ф-т, 2005

Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $x^2-4x+2=0$.

9. Военный университет радиационной, химич. и биологич. защиты, 2001

Чему равна медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе? Ответ обосновать.

10. Ульяновское высшее авиационное училище гражданской авиации, 2006

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна 6. Определить периметр треугольника, если отношение катетов равно $\frac{3}{4}$.

11. Московский гос. университет инженерной экологии, 2003

Найти периметр прямоугольного треугольника, если его площадь $S = 24$ см^2, а длина медианы, проведенной к гипотенузе, $l = 5$ см.

12. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2003

В прямоугольном треугольнике MNP точка C — середина гипотенузы MP. Найти острые углы треугольника MNP, если $\angle CNP = 10^\circ$.

1) 45°;45°; 2) 70°;20°; 3) 30°;60°; 4) 10°;80°; 5) 40°;50°.

13. МГУ. Геологический ф-т, 2005

В треугольнике ABC угол C прямой, тангенс угла A равен $\frac{1}{4}$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

14. Московский гос. университет инженерной экологии, 2000

В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AB опущена высота CK. Найдите площадь треугольника ABC (в см^2), если $AK = 3{,}6$ см, $BK = 6{,}4$ см.

15. Мичуринский гос. аграрный университет, 2003

Круг описан около прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 6 см, а угол, лежащий против этого катета, равен $\pi/6$. Тогда площадь круга равна:

1) 6π см^2; 2) 9π см^2; 3) 36π см^2; 4) 144π см^2; 24π см^2.

16. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2005

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 3. Один из катетов треугольника равен 7. Найдите другой катет треугольника.

1) 16; 2) 20; 3) 24; 4) 30; 5) 32.

17. Московский военный институт, 2001

В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса 4. Найти периметр треугольника, если гипотенуза равна 26.

18. Тверская гос. сельскохозяйственная академия, 2004

В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.

19. Военно-технич. университет ФССС РФ, 2001

В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности и гипотенузы делит гипотенузу на отрезки 3 и 10. Найти больший катет.

20. Казанский гос. технологич. университет, 2001

Найти площадь прямоугольного треугольника, если диаметр описанной окружности равен 15, а радиус вписанной окружности равен 3.

21. МГУ, Ф-т почвоведения, 2001

В треугольнике ABC угол ABC равен 90^0, $AB = BC = 2$. На основании AC взяты точки K и L так, что три угла между BA и BK, BK и BL, BL и BC соответственно равны между собой. Найти длину отрезка BK.

22. МГУ. Ф-т государственного управления, 2006

В прямой угол равнобедренного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ вписан круг радиуса 2. Найдите площадь той части круга, которая лежит вне этого треугольника.

23. Ульяновское высшее авиационное училище гражданской авиации, 2005

Периметр равнобедренного треугольника равен 7, а сумма его боковых сторон в 2,5 раза больше основания. Найти длину боковой стороны.

24. Мичуринский гос. аграрный университет, 2002

Если в равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $40°$, то угол между основанием и высотой, проведенной к боковой стороне, равен: 1) $20°$; 2) $30°$; 3) $35°$; 4) $60°$; 5) $45°$.

25. Московский гос. социально-гуманитарный институт, 2001

Найти площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно 24, а боковая сторона 15.

26. Военно-технич. университет ФССС РФ, 2000

Высота равнобедренного треугольника равна 14. Основание относится к боковой стороне как 48 : 25. Найти основание треугольника.

27. Алтайский гос. технич. университет им. И. И. Ползунова (Барнаул), 2000

В равнобедренном треугольнике высота равна 45, а основание относится к боковой стороне как 4 : 3. Определить радиус вписанного круга.

28. Астраханский инженерно-строительный институт, 2001

Периметр равнобедренного треугольника $\left(2+\sqrt{3}\right)$ см, угол при вершине равен 120^0. Найдите стороны треугольника.

29. Костромской гос. университет им. Н.А. Некрасова, 2001

В равнобедренном треугольнике основание равно $\sqrt{84}$, а угол при основании равен $30°$. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

30. Гос. университет — Высшая школа экономики, 2001

В равнобедренном треугольнике с боковой стороной a и углом при вершине $\alpha = \arccos(0{,}9)$ расстояние между основаниями медианы и высоты, опущенных на боковую сторону из одной и той же вершины основания, равно: 1) $0{,}1a$. 2) $0{,}2a$. 3) $0{,}3a$. 4) $0{,}4a$. 5) $0{,}5a$.

31. МГУ. Геологический ф-т, 2002

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса CD и прямая DE, перпендикулярная CD (точка E лежит на прямой AC). Найдите площадь треугольника ABC, если $CE = 4$ м, $CA = 3$ м.

32. МГУ. Геологический ф-т, 2001

Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 4 м и 6 м. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?

33. МГУ. Ф-т почвоведения, Ф-т глобальных процессов, 2007

Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 18. Через середину D основания AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K и делящая площадь треугольника ABC в отношении 5:2, при этом угол ADK равен 135^0. Найти площадь треугольника ABC.

34. Сибирский гос. университет путей сообщения (Новосибирск), 2004

Дан равносторонний треугольник ABC площади S. Параллельно его сторонам и на равном расстоянии от них проведены 3 прямые, пересекающиеся внутри треугольника и образующие новый треугольник $A_1B_1C_1$ площади Q. Найти расстояние между параллельными прямыми AB и A_1B_1.

35. Государственный университет управления (ГУУ) (Москва), 2002

Периметр треугольника равен 56 см. Найти длину медианы этого треугольника, если она делит его на два треугольника с периметрами 44 см и 42 см.

36. МГУ. Социологический ф-т, филологический ф-т, 2007

Периметр треугольника PQR равен 50, $PR=13$, а высота, опущенная на QR, равна 5. Найти площадь треугольника.

37. Академия Гос. противопожарной службы МЧС РФ (Москва), 2001

В треугольнике углы при основании равны 30° и 45°. Высота треугольника равна 6. Найти периметр треугольника.

38. МГУ. Социологический ф-т, 2005

Высота треугольника, равная 1, делит угол треугольника в отношении 2 : 1, а основание треугольника — на части, большая из которых равна $\frac{4}{3}$. Определить площадь треугольника.

39. Арзамасский гос. педагогич. институт, 2005

Если одна из сторон треугольника на 3 см меньше другой, высота делит третью сторону на отрезки длиной 5 см и 10 см, то периметр треугольника равен: 1) 25; 2) 40; 3) 32; 4) 20; 5) 42.

40. Финансовая академия при Правительстве РФ, 2000

Высота треугольника, равная 4, разделяет основание его на два отрезка, относящиеся как 1 : 8. Найти длину отрезка, параллельного высоте и разделяющего треугольник на две равновеликие части.

41. Централизованное тестирование, 2001

Если в треугольнике ABC заданы $AC=6$, $BC=5$, $\sin C=\frac{4}{5}$, и угол C тупой, то длина стороны AB равна:

1) $\sqrt{93}$; 2) $\sqrt{95}$; 3) $\sqrt{97}$; 4) $\sqrt{99}$; 5) $\sqrt{101}$.

42. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2004

В треугольнике ABC даны длины трех сторон BC, AC и AB, равные соответственно 39, 56 и 25. Вычислить радиус описанной около этого треугольника окружности.

1) 80; 2) 32,5; 3) 56; 4) 65; 5) 25.

43. ЕГЭ, 2003

Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC, если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC, а медиана BM равна 5.

44. Ростовский гос. университет путей сообщения, 2001

В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B, $AB = 5$, $AC = 4$. Определить сторону BC.

45. МГУ. Социологический ф-т, 2002

Определить угол A треугольника между сторонами 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины A, равна $\sqrt{3}$.

46. МГУ. Институт стран Азии и Африки, 2002

В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = 4$, $BC = 6$ и биссектриса $BD = 3\sqrt{2}$. Найдите длину медианы CE.

47. Санкт-Петербургский гос. электротехнич. университет «ЛЭТИ», 2004

В треугольнике ABC длина стороны AB равна $6\sqrt{2}$, длина стороны AC равна 10, а $\angle A + \angle C = \dfrac{1}{3}\angle B$. Найти площадь треугольника.

48. Московский авиационный институт (гос. технич. ун-т) МАИ, 2003

Одна из сторон треугольника равна $\sqrt{13}$ см, а противолежащий ей угол равен $60°$. Найти радиус вписанной в треугольник окружности, если площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$ см^2.

49. МГУ. Физический ф-т, 2000

На стороне AC треугольника ABC взята точка A_1, а на продолжении стороны BC взята точка C_1 (C между B и C_1). Длина отрезка A_1C равна 85% длины стороны AC, а длина отрезка BC_1 равна 120% длины стороны BC. Сколько процентов площади треугольника ABC составляет площадь ΔA_1BC_1?

50. Казанский гос. педагогич. университет, 2002

На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что AM делит медиану BK пополам. Найдите отношение площади треугольника AMC к площади треугольника ABC.

51. МГУ. Физический ф-т, 2000

В треугольнике ABC: $AB = a$, $AC = b$, точка O — центр описанной окружности. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найти CD.

52. МГУ. Институт стран Азии и Африки, 2006

В треугольнике ABC проведены медиана AE и биссектриса CD, пересекающиеся в точке M. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника PBQ, если длина стороны AC равна $3\sqrt{3}$, длина строны BC равна $4\sqrt{3}$, величина угла ACB равна $\dfrac{\pi}{3}$.

53. Московский гос. ин-т радиотехн., электроники и автоматики (технич. ун-т) МИРЭА, 2000

В треугольнике ABC с углом $A = 120°$ проведена биссектриса AD. На сторонах AC и AB взяты соответственно точки K и T так, что $AK = AT = AD$. Через точку K проведена прямая, параллельная AD до пересечения с продолжением стороны AB в точке E. Из точки D опущен перпендикуляр DQ на сторону AB. Известно, что $TK = \frac{15\sqrt{3}}{2}$, $BD = \frac{35}{2}$. Найти отрезок QE и стороны треугольника ABC.

54. Российский гос. университет нефти и газа им. И.М. Губкина, 2002

Определить длины сторон треугольника, если они выражаются целыми числами и являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, причем периметр треугольника равен 15.

55. Рязанская гос. радиотехническая академия, 2001

В круг радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник. При каком соотношении сторон этот треугольник будет иметь наибольшую площадь?

56. Нижнекамский муниципальный институт, 2002

Периметр прямоугольника равен 60 см. Одна сторона больше другой на 10 см. Найти меньшую сторону прямоугольника.

57. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2004

Найти периметр прямоугольника, если его площадь равна 120 и одна из его сторон равна 12.

1) 22; 2) 44; 3) 24; 4) 10; 5) 1440.

58. Дальневосточный гос. технич. рыбохозяйств. университет (Владивосток), 2006

E — середина стороны BC прямоугольника $ABCD$, площадь которого равна 40 см^2. Косинус угла EAD равен $\frac{5}{\sqrt{41}}$. Найти периметр прямоугольника $ABCD$.

59. Академия экономической безопасности МВД РФ, 2000

На сколько процентов изменится (уменьшится или увеличится) площадь прямоугольника, если одну сторону уменьшить на 30 %, а другую увеличить на 30 %?

60. Академия Гос. противопожарной службы МЧС РФ (Москва), 2002

Диагональ прямоугольника равна 5 см, а периметр 14 см. Найти стороны прямоугольника.

61. Сибирский гос. индустриальный университет (Новокузнецк), 2006

Большая сторона прямоугольника равна $\sqrt{10}$, а косинус угла между диагоналями равен 0,25. Найти длину диагонали прямоугольника.

1) 2; 2) $2\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{10}$; 4) 4; 5) 5.

62. Кузбасская гос. педагогич. академия (Новокузнецк), 2005

Точки M и P делят смежные стороны AB и BC прямоугольника $ABCE$ в отношении 3:4 и 4:5 соответственно, считая от их общей вершины B. Найдите отношение площади пятиугольника $AMPCE$ к площади исходного прямоугольника.

63. Красноярский гос. технич. университет, 2002

Диагонали ромба равны 5 и 12. Найти сторону ромба.

64. Пермский регионал. институт педагогических информационных технологий, 2000

Если сторона ромба равна 5, а меньшая диагональ 6, то его большая диагональ равна:

1) 8; 2) 6; 3) 10; 4) 16; 5) 12.

65. Сибирский гос. индустриальный университет (Новокузнецк), 2005

Высота ромба равна 3, а его острый угол равен 30°. Найти площадь ромба.

1) 2; 2) 5; 3) 8; 4) 12; 5) 18.

66. Московский гос. ин-т радиотехн., электроники и автоматики (технич. ун-т) МИРЭА, 2002

В ромбе, площадь которого равна 15, одна диагональ больше другой в 3 раза. Найти сторону ромба.

67. Красноярская гос. академия цветных металлов и золота, 2001

Длины диагоналей ромба относятся как 1 : 2, а площадь ромба равна 12см^2. Найти длину стороны ромба.

68. Орловская региональная академия государственной службы, 2006

Диагональ ромба, равная 6 см, лежит против угла в 60°. Найти площадь ромба.

69. Альметьевский нефтяной институт, 2001; Казанский гос. технологич. университет, 2004

Вершина A ромба соединена с серединами сторон BC и CD точками K и M соответственно. Найти площадь ромба $ABCD$, если площадь треугольника AKM равна 3. 1) 7; 2) 9; 3) 6; 4) 5; 5) 8.

70. МГУ. Географический ф-т, 2001

Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников EAF, FDG, GCH, HBE, причём все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырёхугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найти GH.

71. Московский технич. университет связи и информатики МТУСИ, 2006

Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а его периметр равен 2,8 м. Определите стороны параллелограмма.

72. Челябинский гос. агроинженерный университет, 2000

Тупой угол параллелограмма равен 135^0, а высоты 10 и 20. Найти площадь параллелограмма.

73. Московская гос. академия тонкой химич. технологии (МИТХТ), 2000

В параллелограмме с диагоналями $\sqrt{11}$ и $\sqrt{15}$ стороны относятся как 2:3. Найти длину меньшей стороны.

74. Псковский политехнич. институт — филиал С-Петербургского гос. технич. ун-та, 2000

В параллелограмме $ABCD$ смежные стороны относятся как 1 : 2. Середина M большей стороны AB соединена с вершинами C и D. Определить угол CMD. а) 30^0; б) 60^0; в) 45^0; г) 90^0; д) 75^0; е) 120^0.

75. Московский гос. университет инженерной экологии, 2002

В параллелограмме с последовательными вершинами A, B, C и D на стороне AB взята точка M так, $AM : MB = 5 : 3$, а на стороне CD взята точка N так, что $CN : ND = 1 : 7$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$ (в см^2), если площадь четырехугольника $MBCN$ равна 13 см^2.

76. Арзамасский гос. педагогич. институт, 2001

Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 2, $\angle BAD = 45^0$. Точки E и F расположены на диагонали BD, причём $\angle AEB = \angle CFD = 90^0$, $BF = \frac{3}{2} BE$. Найти площадь параллелограмма.

77. Московский гос. институт электронной техники (технич. ун-т), 2000

Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC и продолжение стороны DC в точках M и K соответственно. Известно, что $AD = 11$ см, $BK = 14$ см, $CK = 5$ см. Найти длину отрезка AM.

78. Московский гос. технич. университет «МАМИ», 2005

В параллелограмме $ABCD$ со стороной $AD = 21$ проведена биссектриса угла A, проходящая через точку P на стороне BC. Найдите периметр трапеции $APCD$, если ее средняя линия равна 14, а диагональ $PD = \sqrt{241}$.

79*. МГУ. Ф-т вычислительной математики и кибернетики, 2003

Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 3$, $AD = \sqrt{3}+1$ и $\angle BAD = 60°$. На стороне AB взята такая точка K, что $AK : KB = 2:1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма выбрана точка L, а на стороне AD выбрана точка M так, что $AM = KL$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N. Найдите величину угла BKN.

80. Петербургский гос. университет путей сообщения, 2000

В равнобедренной трапеции высота равна средней линии. Найдите угол между диагоналями.

81. Московский гос. университет инженерной экологии, 2004

В равнобедренной трапеции высота равна 15 см, а диагональ равна 17 см. Найти площадь трапеции.

82. Военный инженерно-космический ун-т им. А. Ф. Можайского (С-Петербург), 2000

Около круга радиуса $\sqrt{3}$ описана равнобедренная трапеция с углом $\alpha = 60^0$ при основании. Найдите периметр этой трапеции.

83. Казанский гос. технологич. университет, 2003

Найти среднюю линию равнобедренной трапеции, у которой диагональ является биссектрисой острого угла, а периметр и большее основание равны, соответственно, 48 и 18.

1) 14; 2) 16; 3) 10; 4) 12; 5) 15.

84. Орловский гос. институт экономики и торговли, 2005

В равнобочной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и делит ее среднюю линию на отрезки, равные 7,5 см и 12,5 см. Найти длины сторон этой трапеции.

85. Томский гос. университет систем управления и радиоэлектроники, 2000

Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны и имеют длину 50. Найти длину большего основания, если угол при основании равен 60°.

86. МГУ. Химический ф-т и Ф-т наук о материалах, 2004

Известно, что трапеция $ABCD$ — равнобедренная, $BC \parallel AD$ и $BC > AD$. Трапеция $ECDA$ также равнобедренная, причём $AE \parallel DC$ и $AE > DC$. Найти BE, если известно, что косинус суммы углов $\angle CDE$ и $\angle BDA$ равен $\frac{1}{3}$, а $DE = 7$.

87. Казанский гос. технологич. университет, 2000

Дана прямоугольная трапеция. Меньшее её основание равно её высоте и равно 10. Найти квадрат меньшей диагонали трапеции.

88. МГУ. Физический ф-т, 2004

В трапеции $PQRS$ ($QR \parallel PS$) $PQ \perp PS$, $QR = 8$, $PS = 12$, точки A и C — середины сторон PQ и RS соответственно, точка B на отрезке AC, такая что $AB : BC = 4 : 1$. Прямая PB перпендикулярна к стороне RS. Найти площадь трапеции $PQRS$.

89. Московский гос. горный университет, 2000

В трапеции $ABCD$ известны длины оснований 8 и 24 и длины диагоналей 13 и $5\sqrt{17}$. Вычислите площадь трапеции.

90. Альметьевский нефтяной институт, 2000

Боковые рёбра трапеции пересекаются при их продолжении под углом 90°. Меньший острый угол равен 30°. Меньшее боковое ребро равно 1. Средняя линия равна 3. Найти длину большего основания.

91. Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ, 2000

В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M делит диагональ AC пополам, а точка K делит сторону CD в отношении $1 : 3$ ($3CK = KD$). Найти отношение площади треугольника MKD к площади трапеции $ABCD$, если $AD = 4BC$.

92. Междунар. университет природы, общества и человека «Дубна», 2002

В трапеции $ABCD$ точки P и S выбраны на боковых сторонах AB и CD соответственно так, что $3AP = 2PB$ и $2CS = 5SD$. Найти отношение площадей треугольников ΔACS и ΔAPC, если $4BC = AD$.

93. МГУ. Филологический ф-т, 2001

В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найти отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

94. МГУ. Олимпиада «Ломоносов», 2005

Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 3$, если расстояния от вершин A и B до прямой CD равны 5 и 7 соответственно.

95. Ростовский гос. строительный университет, 2003

Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти наибольшую из сторон трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

1) 25; 2) 17,2; 3) 33,9; 4) нет правильного ответа; 5) 14; 6) 24; 7) 21; 8) 29,4; 9) 17.

96. Брянская гос. инженерно-технологич. академия, 2001

Длина боковых сторон трапеции 8 и 6. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

97. МГУ. Ф-т психологии, 2005

В выпуклом четырёхугольнике $KLMN$ диагонали LN и KM равны стороне KL. Найти угол LMN и сторону KL, если угол MNK прямой, $LM = 3$, $KN = 4$.

98. МГУ. Геологический ф-т, 2007

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 14, радиус вписанной в него окружности равен 2, а длины сторон AB и BC равны 4 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон AD и CD?

99*. МГУ. Ф-т вычислительной математики и кибернетики, 2005

На стороне KL выпуклого четырехугольника $KLMN$ выбрана точка A так, что $\angle ANK = \angle KLN$ и $\angle AMK = \angle KLM$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки K до прямой MN к расстоянию от точки M до прямой KN равен 2, $MN = 15$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMN.

100. Ярославский гос. технич. университет, 2006

Если $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ и $\angle D$ — внутренние углы выпуклого четырёхугольника $ABCD$ и $\angle A = 170^0$, $\angle B = 160^0$, $\mathrm{ctg}\angle C = 6$, то $\mathrm{tg}\angle D$ равен:

1) $\frac{24-37\sqrt{3}}{107}$; 2) $\frac{37\sqrt{3}-24}{33}$; 3) $\frac{37\sqrt{3}+24}{107}$; 4) $\frac{24-37\sqrt{3}}{33}$; 5) $\frac{37\sqrt{3}-24}{107}$.

101. Смоленский гос. педагогич. университет, 2001

Ломаную границу ABC двух полей *(см. рис. 1)* требуется заменить отрезком прямой так, чтобы площади полей не изменились. Как это сделать?

Рис. 1.

102. Кузбасский гос. технич. университет (Кемерово), 2004

Радиус круга уменьшили на 10%. На сколько процентов уменьшится площадь круга?

103. МГУ. Институт стран Азии и Африки, 2000

Определить радиус окружности, если вписанный в неё угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу 120°.

104. МГУ. Физический ф-т, 2005

На окружности взяты последовательно точки P, Q, R и S, $PQ = PS$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T, $RQ = q$, $RS = s$, $RT = t$. Найти PT.

105. Мичуринский гос. аграрный университет, 2001

В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.

106. Иркутский гос. технич. университет, 2000

Из точки A к окружности с центром O и радиусом 8 см проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания). Найти AB, если $\angle BAC = 60^0$.

1) 8; 2) $8\sqrt{3}$; 3) 10; 4) 16; 5) нет правильного ответа.

107. Дальневосточный гос. технич. рыбохозяйств. университет (Владивосток), 2005

Из точки A к окружности радиуса 7,5 см проведены две касательные длиной 10 см. Найти расстояние от точки A до хорды, соединяющей точки касания.

108. Московский педагогич. гос. университет, 2005

Прямые KB и KC касаются окружности с центром в точке O в точках B и C соответственно. Найти площадь круга, если $KO = 10$, а $BC = 6$.

109. Московский гос. социально-гуманитарный институт, 2000

Из точки A, не лежащей на окружности, проведены касательная длины 16 см к окружности и секущая. Найти радиус окружности, если расстояние от точки A до одной из точек пересечения с окружностью равно 32 см, а секущая удалена от центра окружности на 5 см.

110. МГУ. Ф-т психологии, 2006

Прямая, проходящая через точку K, пересекает окружность в точках L и M (точка L лежит между точками K и M). Другая прямая, проходящая через точку K, пересекает окружность в точках N и P (точка N лежит между точками K и P). Продолжения отрезка LN за точку N и отрезка MP за точку P пересекаются в точке R, $LR = 1$, $KN = 3KL$. Найти MR.

111. МГУ. Олимпиада «Ломоносов», 2005

На диаметре AB окружности взяты точки C и D, на его продолжении за точку B — точка E, а на окружности — точка F, причём $\angle AFC = \angle BFE$, $\angle DAF = \angle BFD$, $AB = 8$, $CB = 6$ и $DB = 5$. Найти BE.

112. Московский гос. институт стали и сплавов (технологич. ун-т) МИСиС, 2000

Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D, а меньшую — в точках B и C, причем $AB{:}BC{:}CD = 2{:}4{:}3$. Найти отношение радиуса большей окружности к радиусу меньшей окружности.

113. МГУ. Социологический ф-т, Филологический ф-т, 2006

Окружности радиусов 7 и 3 касаются внутренним образом. В большей окружности существуют ровно три различные хорды, имеющие одинаковую длину и касающиеся меньшей окружности. Найти отрезки, на которые эти хорды делятся точками касания.

114. МГУ. Олимпиада «Ломоносов», 2006

Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что $DE=6$, $BE=10$. Найти радиусы окружностей.

115. Московский гос. университет инженерной экологии, 2001

Две одинаковые окружности радиуса R и третья окружность радиуса r попарно касаются друг друга и имеют общую внешнюю касательную. Найти r (в см), если площадь треугольника, образованного отрезками, соединяющими центры окружностей, $S = 147$ см^2.

116. Московский гос. университет инженерной экологии, 2002

Две одинаковые окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусом r касаются друг друга и касаются внутренним образом третьей окружности с радиусом $R = 2 \cdot r$. Четвертая окружность с радиусом r_3 и центром O_3 касается каждой из трех указанных окружностей. Найти r_3 (в см), если площадь треугольника $O_1O_2O_3$ равна 27 см^2.

117. Ярославский гос. педагогич. университет им. К.Д. Ушинского, 2002

Три окружности с центрами в точках A, B и C и радиусами 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

118. Московский гос. университет инженерной экологии, 2003

Окружность радиуса $r_1 = 4$ см с центром O_1, касается окружности радиуса $r_2 = r_1$ с центром O_2 и окружности радиуса $r_3 = 3r_1$ с центром O_3. Найти площадь треугольника $O_1O_2O_3$, если все три окружности имеют общую внешнюю касательную.

119. МГУ. Физический ф-т, 2004

Прямая, перпендикулярная к диаметру MN полукруга с радиусом 5, пересекает этот диаметр в точке K ($MK : KN = 2 : 8$), а дугу полуокружности — в точке L. Найти радиус окружности, касающейся отрезков LK, KN и дуги LN.

120. МГУ. Химический ф-т и Ф-т наук о материалах, 2000

В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найти сумму длин второй и третьей окружности, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного четвёртой окружностью, равна 64π.

121. МГУ. Ф-т почвоведения, 2002

Внутри прямоугольного треугольника помещены две окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается одного из катетов, гипотенузы и другой окружности. Найти радиусы этих окружностей, если катеты треугольника равны a и b.

122. МГУ. Геологический ф-т, 2003

Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность. Из вершины C прямого угла проведена хорда CM, пересекающая гипотенузу в точке K. Найдите площадь треугольника ABM, если $AK : AB = 1 : 4$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = 2$.

123. МГУ. Ф-т государственного управления, 2002

На окружности радиуса 3, описанной около правильного треугольника, взята точка E. Известно, что расстояние от точки E до одной из вершин треугольника равно 5. Найдите разность расстояний от точки E до двух других вершин треугольника.

124. МГУ. Институт стран Азии и Африки, 2003

В правильный треугольник DEF вписана окружность радиуса r. Эта окружность касается внешним образом трех других окружностей того же радиуса в точках касания сторон треугольника. Центры внешних окружностей соответственно O_1, O_2, O_3. Найдите площадь шестиугольника, получающегося при пересечении треугольников DEF и $O_1O_2O_3$.

125. Санкт-Петербургская гос. лесотехническая академия, 2000

Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки длиной 5 см и 3 см, считая от вершины. Найти длины сторон треугольника.

126. МГУ. Институт стран Азии и Африки, 2001

В треугольнике ABC даны длины сторон $AB=\sqrt{7}$, $BC=4$ и $AC=\sqrt{3}$. Сравните величину угла AOB и 105°, если O — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

127. Ростовский гос. университет путей сообщения, 2002

В треугольник вписана окружность радиуса 4 см. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки длиной 6 см и 8 см. Найти периметр треугольника.

128. Российский заочн. институт текстильн. и лёгкой промышленности, 2001

В треугольнике сторона $BC=4$, а разность двух других сторон $AB-AC=2$. Найти стороны треугольника, если радиус вписанной в него окружности $r=1$.

129. Московский гос. горный университет, 2000

Периметр треугольника ABC равен 9, радиус вписанной в этот треугольник окружности — $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от центра вписанной окружности до вершины B, если длина стороны AC равна 3,5.

130. МГУ. Биофак, Ф-т биоинжен. и биоинформ., Ф-т фундам. медицины, 2002

Длины сторон треугольника ABC равны 4, 6 и 8. Вписанная в этот треугольник окружность касается его сторон в точках D, E и F. Найти площадь треугольника DEF.

131. МГУ. Московская школа экономики, 2005

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC=21$, $BM=9$, а угол ABC равен $60°$.

132. МГУ. Филологический ф-т, 2000

Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Найти периметр четырёхугольника $ABMN$, если известно, что $AB=5$, $MN=3$.

133. МГУ. Физический ф-т, 2002

Окружность, вписанная в треугольник BCD, касается его сторон в точках L, M и N. Площадь ΔBCD в 4 раза больше площади ΔLMN. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей для ΔBCD.

134. МГУ. Ф-т почвоведения, 2000

Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны 30, 60 и 90 градусам, а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

135. Московский гос. институт электроники и математики (технич. ун-т), 2000

Дан треугольник ABC ($AB = 39$; $BC = 15$; $AC = 36$). Найти: а) высоту, проведенную из вершины C; б) тангенс половины угла треугольника при вершине A; в) расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

136. МГУ. Ф-т глобальных процессов, 2006

В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $BC = 4$ проведена биссектриса BL, точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, $BO:OL = 3:1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABL.

137. МГУ. Ф-т психологии, 2004

Через вершины K и M прямоугольного треугольника KML с катетом $KM = 7$ проходит окружность диаметра 8. Прямая LN касается этой окружности в точке N. Найти величину угла KMN и длину второго катета KL, если луч NK делит угол LNM пополам.

138. МГУ. Ф-т почвоведения, 2006

В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Окружность проходит через точку C, касается стороны AB в точке D и пересекает стороны AC и BC в точках K и L соответственно. Прямые CD и KL пересекаются в точке T. Найти отношение $CT : TD$, если $AB = 10$, $BC = 9$, $AC = 11$.

139. МГУ. Филологический ф-т, 2002

Окружность радиуса 2 проходит через середины трёх сторон треугольника ABC, в котором величины углов A и B равны $30°$ и $45°$ соответственно. Найти длину высоты, проведённой из вершины A.

140. Новосибирский гос. университет, 2005

В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AB и BC окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что площади треугольников BMN и BCN равны 12 и 15.

141. МГУ. Физический ф-т, 2005

Вершина M прямого угла в ΔLMN лежит внутри окружности с центром O и радиусом 8, проходящей через концы гипотенузы LN, MH — высота ΔLMN. На прямой LN взята точка K так, что $KH = OH$. Найти MK.

142. МГУ. Физический ф-т, 2001

В треугольнике ABC: $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N. На отрезках AN и CM как на диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок MN в точке D, $MD:DN=\sqrt{3}:1$. Найти $\angle BCA$.

143. МГУ. Ф-т вычислительной математики и кибернетики, 2007

В треугольнике ABC точка D является основанием высоты, опущенной из точки A на сторону BC. Окружность диаметра $2\sqrt{2}$ проходит через точки B и D и касается внешним образом окружности, описанной около треугольника ACD. Известно, что $AC=4\sqrt{2}$, $BC=6$. Найдите величину угла ABC.

144. Российский гос. университет нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены биссектрисы AM и CN, точка их пересечения обозначена O. Известно, что $\cos\angle BAC = 17/32$, а радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен 45. Найти радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $BMON$.

145. МГУ. Геологический ф-т, 2004

В треугольнике ABC угол B прямой, точка M лежит на стороне AC, причём $AM:MC=\sqrt{3}:4$. Величина угла ABM равна $\frac{\pi}{3}$, $BM = 8$. Найдите величину угла BAC и расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников BCM и BAM.

146. МГУ. Геологический ф-т, 2006

В прямоугольном треугольнике PQR длина гипотенузы PQ равна 3, разность углов QPR и PQR равна $\frac{\pi}{5}$, точка K — середина PQ. Чему равно расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников KPR и KQP?

147. МГУ. Ф-т почвоведения, 2004

В окружность радиуса 5 вписан квадрат. На окружности отмечена точка, расстояние от которой до одной из вершин квадрата равно 6. Найти расстояния от этой точки до трёх других вершин квадрата.

148. Ростовский гос. университет путей сообщения, 2005

Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. Точки A и B лежат на окружности, а точки C и D вне окружности, длина отрезка касательной, проведенной из точки C к этой окружности, равна 2. Найдите квадрат диаметра окружности.

149. МГУ. Биофак, Ф-т биоинжен. и биоинформ., Ф-т фундам. медицины, 2003

В ромбе $ABCD$ через точки A, B, C проведена окружность с центром в точке O_1, а через точки A, B, D проведена окружность с центром в точке O_2. Известно, что отношение длины отрезка O_1O_2 к длине отрезка AO_2 равно 4. Найти величину угла $\angle DAO_2$.

150. Московский автомобильно-дорожный институт (гос. технич. ун-т), 2005

Около окружности радиуса 2 описана равнобочная трапеция с большим основанием 5. Найдите площадь этой трапеции.

1) 10; 2) 18,2; 3) 16,4; 4) 12; 5) 14.

151. МГУ. Физический ф-т, 2002

В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 4, которая касается боковых сторон трапеции в точках B и C, $BC = \frac{32}{5}$. Найти площадь трапеции.

152. Гос. университет — Высшая школа экономики, 2001

Если в описанной около круга равнобедренной трапеции расстояние от центра этого круга до дальней вершины в четыре раза больше радиуса круга, то косинус острого угла трапеции равен:

1) 0,96. 2) 0,875. 3) 0,92. 4) 0,25. 5) 0,75.

153. МГУ. Биофак, Ф-т биоинжен. и биоинформ., Ф-т фундам. медицины, 2004

В равнобочной трапеции с основанием 1 и 4 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найти площадь трапеции.

154. МГУ. Ф-т глобальных процессов, 2005

Найдите площадь трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), вписанной в окружность с центром в точке O, если её высота равна 2, а угол COD равен $60°$.

155. ЕГЭ, 2006

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.

156. МГУ. Геологический ф-т, 2000

В трапецию с основаниями длины 3 и 5 можно вписать окружность и около неё можно описать другую окружность. Вычислить площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, её меньшим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

157. Московский гос. институт стали и сплавов (технологич. ун-т) МИСиС, 2001

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC ($AD > BC$). В трапецию вписана окружность с центром в точке O. Через точки A, B и D проведена другая окружность радиуса 5 с центром в точке O_1. Найти AD, если $OO_1 = 1$.

158. МГУ. Биофак, Ф-т биоинжен. и биоинформ., Ф-т фундам. медицины, 2006

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 2$, $AD = 1$ вписан в круг. Найти радиус этого круга.

159. МГУ. Ф-т государственного управления, 2004

Длины трёх сторон четырёхугольника, вписанного в окружность радиуса $2\sqrt{2}$, одинаковы и равны 2. Найдите длину четвёртой стороны.

160. Малый исследовательский университет (МИУ) (Москва), 2000

Четырёхугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие также вписанный четырёхугольник. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$, если его периметр равен p, и $MN/ML = 2$, $MN/KL = 8$.

161. МГУ. Химический ф-т и Ф-т наук о материалах, 2003

Четырёхугольник $KLMN$ вписан в окружность. Диагонали четырёхугольника KM и LN перпендикулярны. Найти расстояние от центра окружности до стороны KN, если $LM = 4$.

162. МГУ. Высшая школа бизнеса, 2004

Найдите периметр треугольника KLM, если известны координаты его вершин $K\,(-4;-3)$, $L\,(2;\,5)$ и точки $P\,(5;\,1)$, являющейся серединой стороны LM.

163. Санкт-Петербургский гос. электротехнич. университет «ЛЭТИ», 2004

Точки $A(-5;6)$, $B(-3;4)$ и $C(1;-8)$ — вершины треугольника ABC. Точка M лежит на стороне AB, точка N лежит на стороне BC, а MN

— средняя линия треугольника. Написать уравнение прямой, содержащей среднюю линию MN, и найти длину отрезка MN.

164. Псковский политехнич. институт — филиал С-Петербургского гос. технич. ун-та, 2000

Найти косинусы углов треугольника с вершинами $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(4; 5)$. а) 0,4; 0,6; 0; б) 0,6; 0; 0,8; в) 0,8; 0; 0,4; г) 0,2; 0,4; 0,8; д) 0,4; 0,8; 0,6; е) 0,1; 0; 0,8.

165. МГУ. Ф-т почвоведения, 2005

На плоскости даны точки с координатами $A=(-1,2)$, $B=(-2,1)$, $C=(-3,-3)$, $D=(0,0)$. Они являются вершинами выпуклого четырёхугольника $ABCD$. В каком отношении точка пересечения его диагоналей делит диагональ AC?

166. МГУ. Ф-т государственного управления, 2005

В четырёхугольнике $PQRS$ найдите точку T так, чтобы отношение площадей треугольников RQT и PST было равно 2 : 1, а треугольников SRT и PQT — 1 : 5, если известны координаты всех его вершин: $P(6;-2)$, $Q(3;4)$, $R(-3;4)$, $S(0;-2)$.

167. МГУ. Ф-т государственного управления, 2001

На координатной плоскости заданы точки $A(9; 1)$, $B(2; 0)$, $D(1; 5)$ и $E(9; 7)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где C — точка пересечения прямых AD и BE.

168. МГУ. Институт стран Азии и Африки, 2006

Точки K, L, M, N с координатами $(-2;3)$, $(1;4)$, $(3;2)$, $(-1;-1)$ лежат на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ соответственно. Найдите его площадь.

169. Казанский гос. технологич. университет, 2000

В параллелограмме $ABCD$ даны точка $B(2; 3)$, вектор $\overrightarrow{AB}(1; 2)$ и точка пересечения диагоналей $Q(5; 3)$. Найти сумму координат точки C. 1) 14; 2) 4; 3) 12; 4) 7; 5) 6.

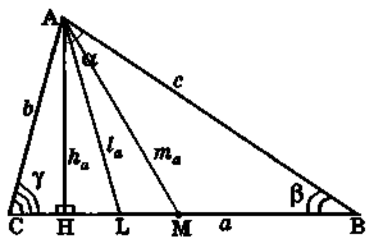
170. Санкт-Петербургский гос. электротехнич. университет «ЛЭТИ», 2006

Векторы $(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b})$ и $(\vec{a}+\vec{c}+\vec{b})$ перпендикулярны. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равны, а длина вектора $\vec{a}$ в 5 раз больше длины вектора $\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Треугольник

Обозначения: a, b, c — длины сторон ΔABC, лежащих соответственно против углов α, β, γ; $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; S — площадь; R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей; h_a, m_a, l_a — длины высоты ($AH \perp BC$), медианы (CM = MB) и биссек-



трисы ($\angle CAL = \angle LAB$), проведенных из вершины A.

Свойства треугольника

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$;

$a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$ (*неравенство треугольника*); пусть c — наибольшая из трех сторон треугольника, тогда если $c^2<a^2+b^2$, то треугольник остроугольный; если $c^2=a^2+b^2$, то треугольник прямоугольный; если $c^2>a^2+b^2$, то треугольник тупоугольный.

Признаки равенства треугольников

1. $a=a_1$, $b=b_1$, $\gamma=\gamma_1$;
2. $c=c_1$, $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$;
3. $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$.

Признаки подобия треугольников

1. $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$; 2. $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}$, $\gamma=\gamma_1$; 3. $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{c}{c_1}$.

Средняя линия треугольника (отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника) параллельна третьей стороне, и длина ее равна половине длины третьей стороны.

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

Теорема косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника. Эта точка называется центром *тяжести.*

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\ ;\ m_a=\sqrt{\frac{a^2}{4}+c^2-ac\cos\beta}\ .$$

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся *центром вписанной* в треугольник *окружности.*

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\ ;\ r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Биссектриса при пересечении делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника: $\frac{b_a}{c_a}=\frac{b}{c}$, где $b_a=CL, c_a=BL$, L — точка пересечения биссектрисы AL и стороны BC.

$$l_a=\frac{\sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{ac}{b+c}=\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}\ ;\ l_a=\sqrt{b\cdot c-b_a\cdot c_a}\ .$$

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром.*

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ;\ h_a=b\sin\gamma.$$

Перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника через их середины (*серединные перпендикуляры*), пересекаются в одной точке. Эта точка является *центром описанной окружности.*

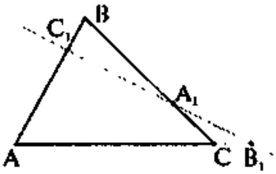
$$R=\frac{abc}{4S};\ \ R=\frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Площадь треугольника:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a;\ \ S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma;\ \ S=pr;\ \ S=\frac{abc}{4R};$$

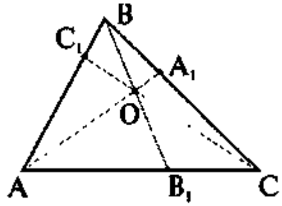
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона.

Теорема Менелая:



Три точки A_1, B_1, C_1, расположенные соответственно на стороне BC, продолжении стороны AC и стороне AB треугольника ABC (см. рисунок), лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется условие: $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$

Теорема Чевы:



Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, (точки A_1, B_1, C_1 принадлежат соответствующим сторонам ΔABC — см. рисунок) пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется условие: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

Равносторонний треугольник

$a=b=c;$ $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ;$ $h_a=l_a=m_a=\frac{a\sqrt{3}}{2};$

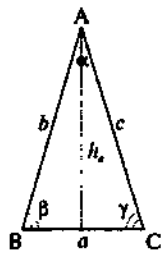
$R=\frac{a\sqrt{3}}{3};$ $r=\frac{a\sqrt{3}}{6};$ $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Равнобедренный треугольник

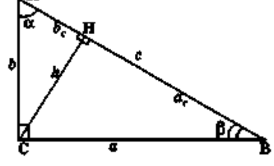
$b=c$ — боковые стороны, a — основание;

$\beta=\gamma=90^\circ-\frac{\alpha}{2};$ $h_a=l_a=m_a;$

$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha.$



Прямоугольный треугольник



$\gamma=90^\circ$, $\alpha+\beta=90^\circ$; a, b — катеты, c — гипотенуза;

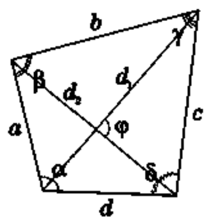
$c^2=a^2+b^2$ (*теорема Пифагора*);

$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta$;

$a^2 = c\cdot a_c,\ b^2 = c\cdot b_c,\ h^2 = a_c\cdot b_c,\ R = \dfrac{c}{2} = m_c$;

$h = \dfrac{ab}{c}$; $r = \dfrac{a+b-c}{2}$; $S = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}ch$.

Выпуклый четырёхугольник



Обозначения: a, b, c, d — стороны; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — углы; d_1, d_2 — диагонали; φ — угол между диагоналями; h_a — высота, опущенная на сторону a; S — площадь.

Сумма углов — 360°.

Площадь четырехугольника

$$S = \frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}(ad\sin\alpha + bc\sin\gamma).$$

Вокруг выпуклого четырехугольника ***можно описать окружность*** тогда и только тогда, когда сумма любых двух его противоположных углов равна 180°: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Центр окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам четырехугольника.

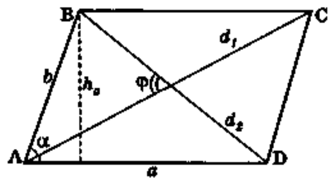
Для вписанного четырёхугольника:

$ac + bd = d_1 d_2$ (формула Птолемея);

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ — полупериметр.

В выпуклый четырехугольник ***можно вписать окружность*** тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны: $a + c = b + d$. Центр окружности — точка пересечения биссектрис.

Параллелограмм



Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства:

1) противоположные стороны равны;

2) противоположные углы равны;

3) диагонали делятся точкой пересечения пополам;

4) углы, прилежащие к любой стороне, в сумме равны 180°;

5) $h_a = b\sin\alpha$; 6) $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$;

7) $S = ah_a = ab\sin\alpha$;

8) вокруг параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником;

9) в параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы — прямые.

Свойства:

1) все свойства параллелограмма;

2) $d_1 = d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$; 3) $S = ab$.

Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства:

1) все свойства параллелограмма;

2) $d_1 \perp d_2$ (т.е. $\varphi = 90°$);

3) диагонали делят углы пополам;

4) $S = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

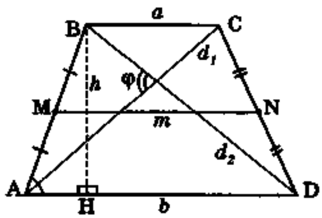
Квадрат — параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы — прямые (или прямоугольник, у которого все стороны равны; или ромб, у которого все углы — прямые).

Свойства:

1) все свойства прямоугольника и ромба;

2) $d_1 = d_2 = a\sqrt{2}$; 3) $S = a^2$.

Трапеция



Трапеция — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — не параллельны.

$BC = a$, $AD = b$ — основания трапеции, AB, CD — боковые стороны, $BH = h$ — высота.

Средняя линия трапеции. Если $AM = MB$, $CN = ND$, то $MN = m$ — средняя линия; $MN \parallel BC \parallel AD$, $m = \dfrac{a+b}{2}$.

Площадь трапеции: $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = mh$; $S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Равнобокая трапеция: $AB = CD$. Тогда: $AC = BD$; углы при основании равны.

Прямоугольная трапеция: один из углов при основании равен $90°$.

Многоугольники

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Правильный многоугольник — все стороны и углы равны между собой.

Связь между стороной правильного многоугольника и радиусами описанной (R) и вписанной (r) окружностей:

$a = 2R \sin\dfrac{180°}{n}$; $a = 2r \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$.

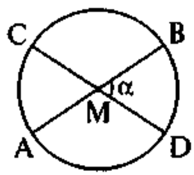
Площадь правильного n-угольника:

$S = \dfrac{1}{2} R^2 n \sin\dfrac{360°}{n}$; $S = \dfrac{Pr}{2} = \dfrac{anr}{2}$ (P — периметр, r — апофема).

Окружность и круг

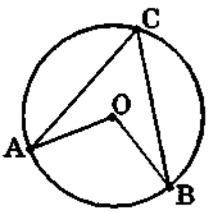
Окружность — геометрическое место точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от некоторой данной точки плоскости, называемой *центром окружности*. *Круг* состоит из окружности и внутренних точек.

Хорда — отрезок, соединяющий две точки окружности. Равные хорды окружности равноудалены от ее центра. Хорда, проходящая через центр окружности, является по длине наибольшей и называется *диаметром*. Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.



Если хорды AB и CD пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Угол между двумя хордами: $\alpha = \dfrac{\cup AC + \cup BD}{2}$.



Вписанный угол — угол, образованный двумя хордами, выходящими из одной точки на окружности ($\angle ACB$ на рисунке).

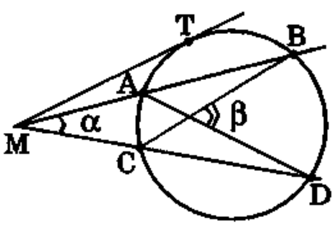
Центральный угол — угол, образованный двумя радиусами OA и OB (O — центр окружности) — угол AOB на рисунке.

Центральный угол AOB измеряется дугой AB, на которую он опирается. Вписанный угол ACB измеряется половиной дуги AB, на которую он опирается .

Свойства касательных

Касательная — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называемую точкой касания. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Если из точки M проведены к окружности две касательные и A, B — точки касания, то: 1) $MA = MB$; 2) центр окружности лежит на биссектрисе угла AMB.



Если из точки M вне окружности проведены к окружности касательная MT (T — точка касания) и *секущая* MAB (A, B — точки пересечения прямой с окружностью), то $MA \cdot MB = MT^2$.

Следствие. Если две прямые, проходящие через точку M, пересекают окружность в точках A и B, C и D соответственно (*см. рисунок*), то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, на которую опирается хорда.

Угол между двумя секущими, проведенными из точки вне окружности (*см. рисунок*), равен полуразности дут, лежащих внутри его (или полусумме, если секущие проведены из точки внутри окружности): $\alpha = \frac{\cup BD - \cup AC}{2}$; $\beta = \frac{\cup BD + \cup AC}{2}$.

Длина окружности: $L = 2\pi R = \pi D$ (R — радиус окружности, D — диаметр).

Длина дуги: $l = Ra = \frac{\pi R\alpha}{180}$ (a — радианная мера дуги; α — градусная мера).

Площадь круга: $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$.

Сектор — часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности.

Площадь сектора: $S = \frac{Rl}{2} = \frac{R^2 a}{2} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$.

Сегмент — часть круга, ограниченная хордой и дугой.

Площадь сегмента $S = \frac{R^2(a - \sin\alpha)}{2}$ (или $S = \frac{R^2(a + \sin\alpha)}{2}$, если центр круга лежит внутри сегмента).

Векторы

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется *направленным отрезком* или *вектором*.

В векторе $\vec{AB}$ направление задано от точки A (*начало вектора*) к точке B (*конец вектора*). Вектор также может обозначаться $\vec{a}$, $\bar{a}$ или жирной буквой $\mathbf{a}$ (скаляр обозначается в этом случае a).

Модуль (или *абсолютная величина*, или *длина*) вектора $|\vec{AB}|$ — длина отрезка AB.

Два вектора *равны*, если они коллинеарны (т.е. лежат на параллельных или совпадающих прямых) и имеют одинаковые направления и модули.

Угол между векторами — угол между равными им векторами с общим началом. Может принимать значения от 0° до 180°.

Если вектор $\vec{a}$ имеет началом точку A (x_1; y_1; z_1), а концом точку B (x_2; y_2; z_2), то *координаты вектора* — числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Обозначается обычно $\vec{a}\ (a_1; a_2; a_3)$ или $\vec{a}\ (x_a; y_a; z_a)$.

Единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей, называются *координатными векторами* или *ортами*: e_1 (1; 0; 0), e_2 (0; 1; 0), e_3 (0; 0; 1). Любой вектор представляется в виде $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

Сложение векторов $\vec{a}$ $(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}$ $(x_b; y_b; z_b)$: $\vec{a}+\vec{b} = (x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$. Используется правило треугольника (рис. 1) или правило параллелограмма (рис. 2).

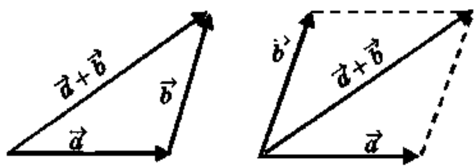


Рис.1 Рис. 2

Вычитание векторов: $\vec{a}-\vec{b} = (x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b)$ — действие, обратное сложению.

Умножение вектора на число: $\lambda\vec{a} = (\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a)$. Вектор $\lambda\vec{a}$ ($\lambda \neq 0$) коллинеарен вектору $\vec{a}$, его модуль равен величине $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda>0$, или противоположно ему, если $\lambda<0$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — число, равное произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

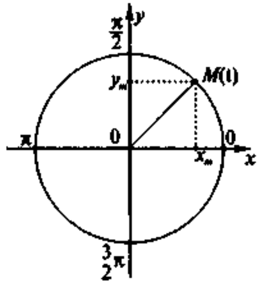
Если $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$, $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

Свойства скалярного произведения:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a};\ \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2;\ \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0;$$

$$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b});\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Тригонометрические функции



1) $\sin t$ — ордината точки $M(t)$ тригонометрической окружности (т.е. y_M);

2) $\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$ (т.е. x_M);

3) $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, $\cos t \neq 0$, $t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$, $\sin t \neq 0$, $t \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Свойства тригонометрических функций

1) $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$;
$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;
$\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — *нечетные функции*;
$\cos x$ — *четная функция*;

2) $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$,
$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x$, $k \in \mathbb{Z}$;
2π — период функций $\sin x$, $\cos x$;
π — период функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Функции одного и того же аргумента

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ $(\sin\alpha \neq 0, \cos\alpha \neq 0)$;

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$;

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$.

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Аргумент		Функция			
		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0°	0	0	1	0	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0
180°	π	0	−1	0	—
270°	$\frac{3\pi}{2}$	−1	0	—	0

Формулы сложения

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}\quad(\cos\alpha\neq0,\ \cos\beta\neq0,\ \cos(\alpha\pm\beta)\neq0).$$

Тригонометрические функции двойного и тройного аргументов

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\quad(\cos\alpha\neq0,\ \cos2\alpha\neq0);$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \quad (\sin 2\alpha \neq 0);$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0);$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0).$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2};$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq -1);$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0);$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq -1).$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Заметим, что в первую очередь нужно хорошо изучить базовые школьные учебники. Их знание абсолютно необходимо! Часто приходится встречать «знатоков», которые «изучили» десятки пособий, но при этом толком не знают ни одного вопроса. Обращайтесь к дополнительной литературе только в том случае, если материал школьного учебника полностью усвоен или же — наоборот — Вам что-то непонятно и нужна помощь со стороны.

Разумеется, приведённый ниже перечень литературы не является полным. Наверняка ряд вполне добротных книг выпал из поля нашего зрения, но всё же, думается, этот список принесёт Вам некоторую пользу.

Школьные учебники

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия для 8–9 классов: Учеб. пособие для уч-ся шк. и кл. с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 1991.

2. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия, 7–9: Уч. для общеобразов. учрежд. – М.: Просвещение, Московские учебники, 2001.

3. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия. Доп. главы к учебнику 8 кл.: учеб. пособие для уч-ся шк. и кл. с углубл. изуч. математики. – М.: Вита–Пресс, 2002.

4. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владимирова Н. Г. Геометрия: Учеб. для 7–11 кл. общеобраз. учрежд. – М.: Просвещение, 1994.

5. Киселёв А. П. Геометрия: Учебник для семилет. и сред. школы. Часть I. Планиметрия. — М.: Учпедгиз, 1962.

6. Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия: Уч. пособие для 6–8 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1982.

7. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. — М.: Просвещение, 2005.

8. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. — М.: Мнемозина, 2005.

9. Шарыгин И. Ф. Геометрия: 7–9 классы. Учебник. — М.: Дрофа, 2007.

Дополнительная литература

10. Амелькин В. В., Рабцевич В. Л., Тимохович В. Л.. Планиметрия. Теория и задачи. – Мн, Асар, 2005.

11. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. — М.: Физматлит, 1972.

Теоретический материал и задачи по всему курсу. Ориентация на вузы с сильной математикой.

12. Будак А. Б., Щедрин Б. М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. — М.: УНЦ ДО, Физматлит, 2003.

Методические указания к ответам на теоретические вопросы устного экзамена (очень рекомендуется абитуриентам факультета ВМиК МГУ, других вузов с повышенными требованиями; для основной массы абитуриентов изложение излишне сложное). Разбор вариантов вступительных экзаменов на ряд факультетов МГУ.

13. Габович И. Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач. – М.: Просвещение: Учеб. лит., 1996.

14. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник. — М.: МЦНМО, 2004.

Изложении геометрии в форме серии задач. Книга адресована учащимся математических классов и преподавателям.

15. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы. — М.: Просвещение, 1990.

Краткое изложение основных разделов школьных курсов алгебры и начал анализа, геометрии. Книга полезна для систематизации и обобщения знаний.

16. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Математика для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 2002.

Классическая книга, по которой готовились к поступлению многие нынешние экзаменаторы. Не потеряла своей актуальности и сейчас. Ряд разделов до сих никому улучшить не удалось...

17. Еременко С. В., Сохет А. М., Ушаков В. Г. Элементы геометрии в задачах. — М.: МЦНМО, 2003.

Конспект занятий по геометрии на основе распространённого в математических школах метода «листочков» (на занятии школьники получают листок, в котором излагаются минимальные теоретические сведения и даются задачи для самостоятельного решения).

18. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И. Элементарная математика. Повторительный курс. — М.: Физматлит, 1976.

Очень хорошая книга для повторения всего курса математики.

19. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. — М.: Мнемозина, 2004.

В конспективной форме изложен теоретический материал для повторения, приведены основные типы задач.

20. Лурье М. В., Александров Б. И. Пособие по геометрии. – М.: Изд-во МГУ, 1984.

21. Лурье М. В. Геометрия. Техника решения задач. — М.: УНЦ ДО, 2004.

Показаны методы и приёмы решения задач, разобрано значительное количество примеров.

22. Мельников И. И., Сергеев И. Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. — М.: УНЦ ДО, НТЦ “Университетский”: Универ-пресс, 2007.

Изложены ключевые методы решения задач, демонстрирующиеся на примере задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах на разных факультетах МГУ. Подробно анализируются типичные ошибки абитуриентов.

23. Мордкович А. Г. Геометрические задачи на плоскости. — М.: Школа-Пресс, 1995.

Содержится 50 планиметрических задач с решениями, замечаниями, советами и комментариями и 50 задач для самостоятельного решения с ответами и указаниями.

24. Письменный Д. Т. Готовимся к экзамену по математике. — М.: Айрис-пресс, 2003.

Основные методы решения задач, ответы на вопросы устного экзамена. Пособие полезно тем, кто хочет повторить математику в кратчайшие сроки.

25. Пособие по математике для поступающих в вузы. Под. ред. Г. Н. Яковлева. — М.: Наука, 1988 и последующие издания.

Фундаментальное пособие для углублённого изучения математики. В каждой главе содержится теоретический материал и задачи (более 2000).

26. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1, 2. — М.: Физматлит, 1991.

Огромное количество систематизированных геометрических задач с решениями по всем разделам.

27. Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2004.

Пособие для самоподготовки. Материал разбит на уроки, к каждому уроку даётся домашнее задание. Ориентация на поступающих в МГУ и другие сильные вузы. Приводятся варианты вступительных экзаменов на все факультеты МГУ за несколько последних лет.

28. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. — М.: Айрис-пресс, 2006.

Ключевые методы решения стандартных задач и задач повышенной сложности по всем разделам школьной математики, в том числе и по планиметрии.

29. Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2004.

30. Шарыгин И. Ф. Математика. Для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 2004.

В каждом разделе даётся обширный справочный материал и разобранные примеры. Пособие ориентировано на сильные вузы.

31. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия). — М.: Физматлит, 2000.

32. Экзамен по математике (серия “Об экзаменах элементарно”). — М.: НТЦ “Университетский”, Универ-пресс, 2006.

Практические и методические рекомендации, советы по психологической подготовке к сдаче экзаменов. Обширная подборка экзаменационных материалов за последние несколько лет из более чем 150 вузов.

33. Юзбашев А. В. Свойства геометрических фигур — ключ к решению любых задач по планиметрии. — М.: МАТИ, 2005.

Более 400 задач, отражающих свойства основных геометрических фигур и их элементов. Все задачи систематизированы, снабжены рисунками и указаниями.

34. Якушева Е. В., Попов А. В., Якушев А. Г. Математика. Все для экзамена. — М.: УНЦ ДО, 2004.

В компактной форме изложен практически весь теоретический школьный курс. Пособие полезно всем, кто готовится к устному экзамену. Но абитуриентам мехмата, ВМиК, МФТИ и ряда других вузов с повышенным уровнем математики следует по ряду разделов пользоваться и другими источниками.

Сборники задач

35. Бачурин В. А. Сборник задач по математике. — М.: Высш. шк., 1998.

36. Вступительные экзамены по математике (2000 — 2002). Сост.: Бородин П. А., Сергеев И. Н., Смуров М. В. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2003.

37. Вступительные экзамены и олимпиады по математике 2003 — 2005 гг. Сост.: Бегунц А. В., Бородин П. А., Сергеев И. Н. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2006.

В этих двух книгах приведены варианты олимпиады «Ломоносов» и вступительных экзаменов в МГУ им. М. В. Ломоносова на факультетах: механико-математический, химический, наук о материалах, биологический, фундаментальной медицины, биоинженерии и информатики, почвоведения, географический, психологии, социологический, филологический.

38. Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих в вузы. — М.: Оникс 21 век, 2003.

Сборник задач вступительных экзаменов 70 – 80-х годов различных вузов бывшего Советского Союза.

39. Зеленский А. С. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: НТЦ "Университетский", АСТ-Пресс, 1997.

Более 1500 задач вступительных экзаменов 1992 – 1995 годов из различных вузов страны с ответами и указаниями.

40. Зеленский А. С., Василенко О. Н. Сборник задач вступительных экзаменов по математике. — М.: НТЦ "Университетский", 2001.

Собрано 3000 задач вступительных экзаменов 1996 – 2000 годов из 150 вузов страны по всем разделам программы; к большинству даны ответы и указания.

41. Зив Б. Г. Задачи к урокам геометрии. 7–11 классы. – СПб.: ЧеРо-на-Неве, 2003.

42. Куланин Е. Д., Норин В. П., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. 3000 конкурсных задач по математике. — М.: Айрис-пресс, 2002.

Задачи из вступительных экзаменов разных вузов с ответами, а во многих случаях с указаниями и решениями.

43. Лужина Л. М., Натяганов В. Л. Сборник задач по геометрии и тригонометрии. — М.: УНЦ ДО, 2001.

Более 1000 задач с ответами по геометрии и тригонометрии.

44. Математика. Задачи вступительных экзаменов в МГУ им. М. В. Ломоносова с ответами и решениями (1999—2003 гг.). Сост.: Григорьев Е. А. — М.: УНЦ ДО, 2004.

Около 100 вариантов вступительных испытаний в МГУ им. М. В. Ломоносова на факультеты: ВМиК, геологический, экономический, государственного управления, Высшая школа бизнеса, ИСАА.

45. Медведев Г. Н. Задачи вступительных экзаменов по математике на физическом факультете МГУ. 1971—2006 гг. — М.: КомКнига, 2007.

46. Назаретов А. П., Пигарев Б. П., Садовничая И. В., Симонов А. А. Задачи вступительных экзаменов (экономические специальности). — М.: УНЦ ДО, Физматлит, 2001.

47. Назаретов А. П., Садовничая И. В., Симонов А. А. Задачи вступительных экзаменов (технические специальности). — М.: УНЦ ДО, Физматлит, 2002.

В обоих книгах даны задачи с решениями, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в московских вузах.

48. Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Физматлит, 1986.

49. Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Факториал, 1995.

Варианты вступительных экзаменов разных факультетов МГУ 1977 – 1981 (первая книга) и 1984 – 1994 (вторая) годов с решениями.

50. Рывкин А. А., Ваховский Е. Б. Сборник задач по математике с решениями для поступающих в вузы. — М.: Оникс 21 век, Мир и Образование, 2003.

Около 500 типовых задач, к каждой из которых даётся до трёх последовательных указаний, помогающих найти путь к решению.

51. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями) (в 2-х книгах). Под редакцией М. И. Сканави. — М.: Высшая школа, 1994, 1995 (и переиздания).

Классический сборник задач. Задачи распределены на три группы по уровню сложности. Полезен абитуриентам технических вузов.

52. Сергеев И. Н. Математика: задачи с ответами и решениями. — М.: КДУ, 2005.

Сборник задач по всему курсу математики. Специальный порядок расположения задач позволяет читателю развивать свои знания как бы по спирали, всё время поднимаясь на более высокий уровень.

53. Справочник для поступающих в Московский университет. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980 – 2008.

Приведены варианты вступительных экзаменов на разные факультеты МГУ по всем предметам.

54. Шарыгин И. Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. — М.: АСТ, 2001.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1. § 1.1

1. $2R\sin\alpha\sin\beta$. **Указания.** По теореме синусов $AC = 2R\sin\beta$, далее $h_c = AC\cdot\sin\alpha$.

2. 1 см или $\dfrac{\sqrt{97}}{5}$ см. **Указания.** Из формулы для площади $\sin C = \dfrac{4}{5}$, отсюда $\cos C = \dfrac{3}{5}$ или $-\dfrac{3}{5}$. После этого находим AB по теореме косинусов.

3. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{8}$. **Указания.** Либо по теореме синусов найти $\sin B$, затем $\sin C = \sin\left(180^0 - A - B\right) = \sin(A+B)$, либо по теореме косинусов найти AB.

4. 4,8. **Указания.** Боковая сторона равна 5 (теорема Пифагора). Затем воспользоваться равенством $8\cdot 3 = 5\cdot h$ (то и другое равно удвоенной площади).

5. 2,4 см^2. **Указания.** Площадь ABC равна 6. Биссектриса делит сторону AC, а значит, и площадь треугольника в пропорции 4:6.

6. $3\sqrt{3}\pm 4$. **Указания.** По теореме синусов $BC = 2R\sin 30^0 = 5$. Далее находим AC по теореме косинусов.

7. $2\sqrt{3}$. **Указания.** По свойству биссектрисы $\dfrac{BC}{HC} = \dfrac{BO}{OH} = \dfrac{2}{1}$, поэтому ΔABC – правильный. Второй способ: BH – высота и медиана; из заданной пропорции следует, что O – точка пересечения медиан; поэтому CL – тоже медиана. Значит, $AC = BC$.

8. 2,4. **Указания.** $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{2}$, поэтому $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{3}{5}$.

9. $\dfrac{b\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$. **Указания.** ΔAOB – равнобедренный с углом α при основании, т. е. в ΔABD известно три элемента.

10. $\angle A = 90^0 - \alpha$, $\angle B = 90^0 - \alpha/2$. **Указания.** Треугольники BEC и ACD – равнобедренные с углом α при вершине, ΔDOC – прямоугольный (здесь O – точка пересечения DE и AC.

Глава 1. § 1.2

1. $\sqrt{7}, \sqrt{19}$. **Указания.** Обозначив $BC = a$, $BD = a\sqrt{3}$, из теоремы косинусов в ΔBDC найти a. Затем применить теорему косинусов в ΔABD.

2. $\sqrt{n^2 - n + 1}$. **Указания.** Искомые радиусы удобно выразить через длину стороны ΔABC с помощью теоремы синусов, найдя предварительно из теоремы косинусов в ΔABN сторону BN.

3. 5 и 40, или 10 и 20. **Указания.** Обозначим стороны через x и y. Тогда, записав площадь двумя способами, имеем: $\frac{xy}{2} = 100$; $\frac{4x}{2} + \frac{8y}{2} = 100$.

4. $\frac{2S}{3r}$. **Указания.** Обозначив $BN = BL = 5a$, $NC = MC = 6a$, $AM = AL = 4a$ (здесь L — точка касания окружности с AB), получим, что полупериметр p равен $15a$. Тогда $S = pr = 15ar$, $a = \frac{S}{15r}$.

5. 5. **Указания.** По теореме синусов из ΔAED: $\frac{5}{\sin 70^0} = \frac{AD}{\sin\alpha}$ (здесь $\alpha = \angle AED$). По теореме синусов из ΔBEC: $\frac{EC}{\sin 70^0} = \frac{BC}{\sin\left(180^0 - \alpha\right)}$.

6. $2\sqrt{3}\mathrm{ctg}\alpha + 2$. **Указания.** По теореме синусов в отсечённом треугольнике $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin(120^0 - \alpha)}$ находим сторону x и затем площадь.

7. 1. **Указания.** По теореме синусов для ΔADC получим: $AD = DC \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$ $= EC \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{EC}{2}$ (здесь $\alpha = \angle DCA = \frac{\angle BCA}{2}$).

8. $\frac{\sqrt{4S^2 + b^4\sin^2\alpha - 2Sb^2\sin 2\alpha}}{b\sin\alpha}$. **Указания.** Сторона AB находится из соотношения $\frac{AB \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = S$, после этого применить теорему косинусов.

9. $\frac{5\sqrt{119}}{13}$. **Указания.** Обозначив одну из сторон через x (тогда вторая равна $6 - x$), определить $x = \frac{30}{13}$ с помощью теоремы косинусов.

10. $2\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$; $\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{1}{3}$. **Указания.** Доказать, что $DF \perp AC$, $ED \perp AB$. Ввести неизвестные $AB = a$, $\angle B = 2\alpha$, выражая отрезки и углы через a и α, найти замыкающее соотношение — тригонометрическое уравнение относительно неизвестной α, из которого получается $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

Глава 1. § 1.3

1. $\frac{m^2+n^2}{m}, \frac{m^2+n^2}{n}$. **Указания.** Для двух получившихся прямоугольных треугольников ACD и CDA записать выражение для высот, опущенных из прямого угла, через проекции катетов на гипотенузу: $m^2 = xn$; $n^2 = ym$.

2. $2\sqrt{17}, 8\sqrt{17}, 34$. **Указания.** Обозначив $CD = x$, из $CD^2 = AD \cdot BD$ получим $x = 8$, $BD = 4x = 32$.

3. $90^0 + \alpha$. **Указания.** Доказать, что точка F принадлежит окружности, описанной вокруг ΔABC (центр этой окружности лежит в D). Далее воспользоваться теоремой о равенстве вписанных углов, опирающихся на одну дугу.

4. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **Указания.** Записать площадь треугольника, основание которого — медиана, а высота равна искомому расстоянию, и приравнять её половине площади исходного треугольника.

5. $\frac{1}{5}$. **Указания.** Радиус вписанной окружности равен 1. Искомое расстояние равно расстоянию между двумя точками на гипотенузе: основанием высоты и точкой касания с окружностью.

6. $8\sqrt{3}$. **Указания.** Записать двумя способами (по теореме синусов) $BM = \frac{6\sin A}{\sin 60^0} = \frac{2\sin\left(90^0 - A\right)}{\sin 30^0}$. Отсюда $A = 60^0$, BM — высота треугольника.

7. $\sqrt{2}$; 12. **Указания.** Обозначить $\angle KCN = \angle NCM = \alpha$, $CN = a$. Тогда $CM = a\sqrt{6}$, $\cos\alpha = \frac{2}{a}$, $\cos 2\alpha = \frac{2}{a\sqrt{6}}$. Отсюда $a = \sqrt{6}$.

8. $\arccos\frac{23}{4\sqrt{37}}$. **Указания.** Обозначив $HL = LC = a$, из $BH^2 = AH \cdot HC$ получим: $16 - a^2 = \frac{9}{2\sqrt{7}} \cdot 2a$. Отсюда $a = \sqrt{7}$. Далее по теореме Пифагора вычислить BC и найти косинус искомого угла из треугольника BLC.

9. $\operatorname{arctg}3$; 10. **Указания.** Из теоремы синусов для ΔABM и ΔBMC находим $3\cos\angle BAC = \sin\angle BAC$ (т. е. $\operatorname{tg}\angle BAC = 3$) и радиусы описанных окружностей: $R_{ABM} = \sqrt{10}$, $R_{BMC} = 3\sqrt{10}$. Центры окружностей соединяются отрезком, проходящим через середину BM, который состоит из двух отрезков, длина каждого из которых определяется по теореме Пифагора: $\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - 3^2} + \sqrt{\left(3\sqrt{10}\right)^2 - 3^2}$.

10. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; R. **Указания.** Обозначив высоту NA через h, а четверть угла N через α, записать равенство отрезков KC и CM. Из полученного уравнения находится $\alpha = \frac{\pi}{8}$, т. е. угол N — прямой.

Глава 1. § 1.4

1. Указания. Из параллельности следует равенство углов: $\angle BCK = \angle DBC$, $\angle BKC = \angle ABD$. Поэтому $\angle BCK = \angle BKC$, т. е. ΔCBK равнобедренный.

2. 3. Указания. Из теоремы синусов для ΔAKC находим AC. Аналогично предыдущей задаче ΔCBK — равнобедренный, поэтому периметр равен $AC + AB + BC = AC + AB + BK = AC + AK$.

3. $6\sqrt{3}$. Указания. Провести через A прямую параллельно BC до пересечения с BM в точке D. Стороны треугольника ABD равны 3, 7 и 8, при этом он имеет ту же площадь, что ABC.

4. $\operatorname{arctg}3$; $\operatorname{arctg}3$; $\pi - 2\operatorname{arctg}3$; $\frac{1}{4}$. Указания. Провести медиану BL, она проходит через D и делится в отношении $2:1$. Тогда DL — медиана прямоугольного треугольника, она равна $\frac{1}{2}$. Поэтому $BL = \frac{3}{2}$. Площадь четырёхугольника ищется как полупроизведение диагоналей $BD = 1$ и $NM = 1/2$.

5. $c\sqrt{2+\frac{c}{b}}$. Указания. Найти AC из соотношения $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, затем воспользоваться формулой (5): $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

6. $\frac{\sqrt{190}}{2}$. Указания. По теореме о биссектрисе найти $AD = 4x$, $DC = 3x$. Из формулы (5) найти $x = 1$. Затем применить формулу (1), связывающую стороны треугольника и медиану.

7. $\frac{\sqrt{6}}{12}$. Указания. Центр O данной окружности лежит на биссектрисе угла B, поэтому $OH : OC = HB : BC$.

8. $\frac{b^2\left(b^2 - a^2\right)}{a^2 + b^2}$. Указания. $AM = BM = CM = b$. По теореме о биссектрисе $\frac{b-a}{b+a} = \frac{x}{y}$ (здесь x, y — катеты). Кроме того, $x^2 + y^2 = (2b)^2$.

9. 5. Указания. O — точка пересечения высот треугольника MBN, поэтому BO — часть высоты этого равнобедренного треугольника, а значит, и часть биссектрисы. Поэтому BP — биссектриса треугольника ABC. Далее находим AB и по формуле (5) находим BP.

10. Указания. Центр вневписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис внешних углов треугольника. Поэтому любые два центра лежат на прямой, содержащей вершину треугольника, а биссектриса соответствующего данной вершине внутреннего угла перпендикулярна этой прямой.

Глава 1. § 1.5

1. 1 : 1. **Указания.** Соответствующие расстояния равны высотам заданных в условии треугольников.

2. Указания. Из соотношения площадей следует, что расстояния от B и C до AD равны между собой.

3. Указания. $\frac{S_{ABK}}{S_{KBL}} = \frac{AK}{KL} = \frac{S_{AKC}}{S_{KLC}}$.

4. 8. **Указания.** Медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников. Четырёхугольник состоит из двух таких треугольников.

5. $\frac{2mn}{3}$. **Указания.** Используя теорему о медиане, найти площадь одного из шести равновеликих треугольников, составляющих ΔABC, или найти площадь четырёхугольника $ABMN$ как полупроизведение диагоналей, а затем использовать то, что эта площадь составляет $\frac{3}{4}$ площади ABC.

6. $\frac{1}{12}$. **Указания.** Т. к. CO — высота и биссектриса, то $AC = MC$, $AO = OM$. Значит, $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$, а поэтому $S_{LMO} = \frac{1}{2} S_{ALM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{ABM} = \frac{1}{12} S_{ABC}$.

7. 270. **Указания.** Продолжить медиану за третью сторону на отрезок, равный длине медианы. Соединить получившуюся точку с вершиной. Получившийся треугольник со сторонами 27, 29 и 52 имеет ту же площадь, что и исходный.

8. $\frac{23}{90}$. **Указания.** По условию $S_{AEM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} S_{ABC} = \frac{2}{15} S_{ABC}$, $S_{BEF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{9} S_{ABC}$, $S_{CMF} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Поэтому $S_{EFM} = \left(1 - \frac{2}{15} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2}\right) \cdot S_{ABC}$.

9. $2 + \sqrt{6}$. **Указания.** Т. к. $\frac{S_{CMN}}{S_{CBA}} = \frac{2}{2+1}$ и $\frac{S_{CMN}}{S_{CBA}} = \left(\frac{CM}{CB}\right)^2$, то $CB = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot CM$.

10. $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$. **Указания.** Если обозначить какую-либо сторону одного из трёх образовавшихся подобных треугольников (например, третьего) через a, то параллельные ей стороны двух других треугольников равны $a\sqrt{\frac{S_2}{S_3}}$ и $a\sqrt{\frac{S_1}{S_3}}$, а сторона подобного им треугольника ABC равна $a\left(1 + \sqrt{\frac{S_1}{S_3}} + \sqrt{\frac{S_2}{S_3}}\right)$. Поэтому площадь ABC равна $S_3 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{S_1}{S_3}} + \sqrt{\frac{S_2}{S_3}}\right)^2$.

Глава 1. § 1.6

1. $\frac{1}{n}$. **Указания.** Провести $NF||AM$ и дважды использовать теорему Фалеса . Заметим, что в этой задаче часто получают неверный ответ $\frac{n+1}{n}$. Причина в том, что в условии дано $AN : AC = n$, а решающие задачу вместо этого считают, что $AN : NC = n$. Условие нужно читать внимательно!

2. 32/315. **Указания.** Провести $PK||BM$. Далее определить отношение $AM : MC$. Искомая площадь равна $S_{APC}\cdot\frac{AO}{AP}\cdot\frac{AM}{AC}=1\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{AO}{AP}\cdot\frac{AM}{AC}$.

3. 5 или 1/5. **Указания.** Искомое отношение связывает площади трёх подобных друг другу треугольников и является единственным неизвестным в получающемся квадратном уравнении.

4. 27:10. **Указания.** Провести $MN||CK$.

5. $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}-\cos\alpha}$, если считать от вершины острого угла. **Указания.** Прямая отсекает треугольник, подобный исходному с коэффициентом подобия $\sqrt{2}$.

6. $\frac{2\sqrt{145}}{3}$. **Указания.** Провести через E прямую параллельно AC до пересечения с BD в точке L. Из подобия следует, что $DL = BL = 3$, $LO = 2$ (здесь O — точка пересечения EC и BD), $EO = 10/3$, $OC = 5/3$. Поэтому по теореме Пифагора $DC = 4/3$. Далее из подобия $AD = 2EL = 4DC = 16/3$.

7. 3. **Указания.** Из подобия $\frac{DF}{HC}=\frac{FO}{OH}=\frac{DE}{AC}=\frac{1}{2}$, поэтому $\frac{BF}{BH}=\frac{DF}{AH}=\frac{1}{2}$ (здесь H — точка пересечения BO и AC). Значит: $DF = FE$, $S_{FEO}=S_{DFO}=1$, $\frac{S_{BFE}}{S_{FEO}}=\frac{BF}{FO}=\frac{3}{1}$.

8. $7S$. **Указания.** Показать, что отрезок BP (так же, как отрезки AN и CM) делится точками пересечения в отношении $3 : 3 : 1$.

9. а) $2 : 1$; б) $9 : 10$. **Указания.** По условию $AP = a$, $PD = 2a$, $NP = b$, $SN = 3b$. Из решения задач о переносе пропорций в треугольнике находим $BN = z$, $ND = 3z$, $AB = t$, $BS = 2t$. Поэтому $\frac{SC}{CD}=\frac{2t}{t}$. Для ответа на второй вопрос находим $NK=\frac{3}{5}z$, после чего $S_{SNK}=\frac{3}{5\cdot 3}S_{SND}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}S_{SPD}=\frac{3}{20}\cdot\frac{2}{3}S_{SAD}$.

10. $\frac{9}{70}$. **Указания.** Показать, что отрезок BP делится точками пересечения в пропорции $21 : 9 : 5$, а отрезок BQ — в пропорции $12 : 9 : 7$.

Глава 2. § 2.1

1. а) Сначала построить треугольник по трём сторонам: стороне параллелограмма и отрезкам, равным половине каждой из его диагоналей.

1. б) Трапецию разбить на параллелограмм и треугольник, проведя через одну из её вершин прямую, параллельную боковой стороне. Построить треугольник по трём сторонам (две из них равны длинам боковых сторон трапеции, а третья равна разности её оснований).

1. в) Построить треугольник по трём сторонам: a, $b/2$ и m. Затем достроить его до треугольника со сторонами a и b, получив тем самым его третью сторону, которая будет диагональю искомого четырёхугольника.

2. 1. *Указания.* Из ΔBDC по теореме синусов найти BD.

3. $16\sqrt{3}$. *Указания.* Расстояния между противоположными сторонами параллелограмма равны 6 и 4. Стороны равны $\dfrac{4}{\sin 60^\circ}$ и $\dfrac{6}{\sin 60^\circ}$.

4. $a^2\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$. *Указания.* Определить площадь ΔAOB, в котором известны три элемента — сторона $a/2$ и два угла. Показать, что $S_{ABCD}=4S_{AOB}$.

5. 156. *Указания.* Через одну из вершин меньшего основания трапеции проведём прямую, параллельную её второй диагонали (см. решение 2 задачи 6 данного параграфа). Высота полученного прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое длин оснований трапеции.

6. $\sqrt{13}$. *Указания.* ΔABD — равносторонний, $BD=6$, $BO=3$. В ΔBOE определены три элемента, поэтому по теореме косинусов находим OE.

7. $\alpha+\operatorname{arctg}(7\operatorname{tg}\alpha)$. *Указания.* Пусть $LQ=a$, тогда $KQ=3a$. Из равенства углов $\angle KNQ=\angle QNM=\angle KQN$ следует $KN=KQ=3a$. Обозначив $\angle KNQ=\gamma$, получим $\angle KLN=\gamma-\alpha$; $\angle KNL=\gamma+\alpha$. По теореме синусов в ΔKLN: $\dfrac{3a}{\sin(\gamma-\alpha)}=\dfrac{4a}{\sin(\gamma+\alpha)}$, откуда $\operatorname{tg}\gamma=7\operatorname{tg}\alpha$.

8. 319. *Указания.* По т. Пифагора $MR=24$. ΔPMS подобен ΔQMR. Поэтому $PM=5$, $MS=12$. Площадь равна полупроизведению диагоналей.

9. 30°. *Указания.* Т. к. $S_{BOA}\cdot S_{COD}=S_{AOD}\cdot S_{BOC}$ (и то, и другое произведение равно $\dfrac{1}{4}AO\cdot BO\cdot CO\cdot DO\cdot\sin^2\alpha$, где α — угол между диагоналями), то $S_{AOB}=30$, поэтому $\sin\angle BAO=\dfrac{1}{2}$, а значит, угол равен 30° или 150°.

10. 36 или $8\sqrt{19}$. *Указания.* По теореме косинусов $KM=2\sqrt{409}$, далее по теореме синусов $\sin\angle LMK=\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{409}}$. Т. к. $\sin\angle MKN=\sin\angle LMK$, то опять по теореме синусов $\sin\angle MNK=\dfrac{12\sqrt{2}}{17}$. Поэтому $\sin\angle LMN=\dfrac{12\sqrt{2}}{17}$ и по теореме косинусов для ΔLMN находим LN (при этом знак косинуса неизвестен).

Глава 2. § 2.2

1. $\sqrt{3}/2$. **Указания.** $ABCD$ — прямоугольник (доказать).

2. 3. **Указания.** Продолжить AE до пересечения с прямой BC в точке M. Тогда $CM = AD$, $AB = BM$.

3. 4. **Указания.** Используя свойство биссектрисы угла, пересекающей прямую, параллельную одной из его сторон, доказать, что $FC = CE = CM$.

4. 2. **Указания.** Искомый радиус является высотой в прямоугольном треугольнике с вершиной прямого угла в центре вписанной в трапецию окружности и гипотенузой AB.

5. 10. **Указания.** Сначала из условия найти площадь ΔABC, затем площадь ΔACD. Зная высоту последнего треугольника, найти $AD = 12$.

6. 10^0. **Указания.** Если обозначить искомый угол через α, то $\angle BMA = \alpha + 20^0$, а равный ему $\angle BAM = 40^0 - \alpha$.

7. 40; 60. **Указания.** Основания относятся как 2 : 3.

8. 12. **Указания.** Сторона ромба равна 10. Половина диагонали находится по теореме Пифагора.

9. $2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)$; меньше. **Указания.** Четырёхугольник, образованный при последовательном соединении середин сторон, является параллелограммом с перпендикулярными диагоналями, т. е. ромбом. Поэтому $AC = BD$. Угол между AC и BD равен 105^0. Площадь находится как полупроизведение диагоналей на синус угла между ними.

10. $\frac{63}{25}$. **Указания.** Из отношения площадей в условии следует: $AE = a$, $BF = 2a$, $ED = 3a$. Поэтому $FC = 2a$. Из подобия треугольников получаем $\frac{FN}{ND} = \frac{FC}{ED} = \frac{2}{3}$ и $\frac{FM}{ME} = \frac{BF}{ED} = \frac{2}{3}$. Поэтому $\frac{S_{FMN}}{S_{FED}} = \frac{4}{25}$.

Глава 2. § 2.3

1. 25. **Указания.** Выполнив построение 2, свести задачу к определению площади прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой 10.

2. $\frac{3ab}{4}$. **Указания.** Достроить трапецию до треугольника (построение 4). Показать, что AC — его высота. Тогда искомая площадь равна разности площадей двух подобных треугольников.

3. $\frac{2ab}{a+b}$. **Указания.** Воспользоваться свойствами 1 и 2.

4. $\frac{|b-a|}{2}$. **Указания.** Рассмотреть два случая: $a > b$ и $b > a$. Длина искомого отрезка равна разности длин двух отрезков, каждый из которых является средней линией соответствующего треугольника.

5. 1 : 6. **Указания.** По условию $BK = 2a$, $KC = 3a$. Т. к. $\frac{BK}{ED} = \frac{KN}{NE} = \frac{BN}{ND} = \frac{1}{2}$, то $ED = 4a$, $AE = 3a$. Поэтому $KN = 2b$, $NE = 4b$, $KM = ME = 3b$, $MN = b$.

6. $18 \big/ (25 + 2\sqrt{130} + \sqrt{445})$. **Указания.** Выполнить построение 3. В образованных прямоугольных треугольниках выразить катеты через высоту трапеции. Определить высоту из условия $AD = 4$, она равна $\frac{18}{5}$. Вычислить длины диагоналей трапеции, после чего найти стороны ΔCBE. Искомый радиус определить по формуле $r = \frac{S}{p}$, учитывая, что в ΔCBE высота равна $18/25$ (пятая часть высоты $ABCD$).

7. 19/44. **Указания.** Достроить трапецию до треугольника SDC. Если обозначить площадь SAB через S, то площадь SDC будет равна $4S$. Тогда площадь SPQ равна $\frac{4}{6} \cdot \frac{10}{14} \cdot S_{SDC} = \frac{40}{21}S$. Поэтому площади четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$ соответственно равны $\frac{19}{21}S$ и $\frac{44}{21}S$.

8. 10/3. **Указания.** Достроить трапецию до треугольника SAD, перенести на него все известные пропорции и вычислить его площадь (она равна $\frac{4}{3}$ площади трапеции). Площадь ΔAPD равна $\frac{1}{4}$ площади ΔASD и равна 10. Для получения искомой площади найти ещё отношение $PQ : QD$.

9. 9,6. **Указания.** Продлить BE до пересечения с AD в точке P. Тогда из подобия ΔBOC и ΔAOP следует: $AP = 9$, $DP = 1$, а из подобия ΔBCE и ΔEPD: $\frac{CE}{ED} = \frac{6}{7}$. После этого: $S_{OCE} = \frac{2}{5}S_{ACE} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7}S_{ACD}$.

10. $\frac{42\sqrt{51}}{625}a^2$. **Указания.** Провести дополнительное построение 2. Угол между двумя известными сторонами (a и $\frac{7a}{5}$) в получившемся треугольнике находится с помощью теоремы синусов $a \cdot \sin 2\alpha = \frac{7a}{5} \cdot \sin\alpha$.

Глава 2. § 2.4

1. 12. **Указания.** Если провести диагональ AC, становится ясно, что площадь $ABCD$ в два раза больше площади $AMCK$.

2. 2, 3. **Указания.** Обозначив через x и y площади искомых треугольников, написать замыкающие соотношения: $x + y + 6 + 1 = 12$, $x \cdot y = 1 \cdot 6$.

3. 1. **Указания.** Доказать, что $NEFM$ — параллелограмм, и поэтому точки N и E также являются серединами соответствующих сторон AB и BC.

4. 1 : 3. **Указания.** Используя метод сравнения площадей треугольников, доказать, что $BC \parallel AD$ и $BC = AE$.

5. $d/3$. **Указания.** С помощью сравнения площадей треугольников доказать, что $MB = ND$, $MN \parallel BD$, $MB=2AM$.

6. $\frac{a\sqrt{73}}{12}$. **Указания.** ME найдём по теореме косинусов из ΔMCE, в котором из условия легко получаем два элемента: MC и угол BCA. Третий элемент EC необходимо найти. Из подобия треугольников AFM и CBM находим $AF = a/3$, поэтому из отношения площадей следует $BE = a/3$, $EC = 2a/3$.

7. 3. **Указания.** $S_{COD} = S_{AOB} = 9$. Обозначить $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$. Замыкающие соотношения: $S_1 + S_2 + 9 + 9 = 48$, $S_1 \cdot S_2 = 9 \cdot 9$.

8. $\frac{1}{6}$. **Указания.** $S_{KBL} = \frac{1}{3}S_{ABL} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S_{ABD} = \frac{1}{24}S_{ABCD}$, $S_{BML} = \frac{1}{2}S_{BCL} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

9. 12. **Указания.** Если последовательно соединить середины сторон четырёхугольника, то получится ромб с диагоналями 2 и 6.

10. 24. **Указания.** Из подобия треугольников GEC и FEA следует: $\frac{GC}{FA} = \frac{GE}{EF} = \frac{EC}{AE} = \frac{2}{1}$. Обозначить площадь AEF через S, тогда $S_{AGE} = 2S$, $S_{ABG} = 6S$. Поэтому $S = 1$, $S_{ABG} = 6$, $S_{ABC} = 12$.

11. 0,8. **Указания.** Если обозначить точку пересечения CD и AM через N, а площадь трапеции через S, то $S_{ABC} = S/5$, $S_{ACD} = 4S/5$, $S_{AND} = 3S/4$, $S_{ACN} = S/4 - S/5 = S/20$. Далее из подобия: $\frac{CM}{AD} = \frac{CN}{ND} = \frac{S_{ACN}}{S_{AND}} = \frac{4}{20\cdot 3}$.

Глава 3. § 3.1

1. 0°. **Указания.** Сравнить длины хорд AB и DE.

2. $\sqrt{3}$. **Указания.** $\angle ABD = \angle DBC = 30^0$. Поэтому $\angle ACD = \angle DAC = 30^0$.

3. $\frac{b\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$. **Указания.** Выразить через α все углы ΔABD, имея в виду, что $AO = BO = R$. Затем воспользоваться теоремой синусов.

4. $\frac{2\sqrt{510}}{15}$. **Указания.** Выразить равные отрезки NP и PQ по теореме косинусов через угол $\angle NMP = \angle PMQ = \alpha$. Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $NP = PQ = \sqrt{34}$.

5. $r/8$. **Указания.** Проведя высоту в равнобедренном треугольнике, основанием которого является заданная хорда, а вершина находится в центре окружности, отметить все углы, равные по величине углу между хордой и касательной. Искомое расстояние вычислить из подобия двух прямоугольных треугольников.

6. $\angle A = \angle D = 30^0$, $\angle B = \angle C = 150^0$. **Указания.** Доказать, что ΔABC и ΔBCD — равнобедренные.

7. 55. **Указания.** По теореме Пифагора найти KC, затем воспользоваться подобием треугольников BKC и AKD (соответствующие углы равны). Площадь равна полупроизведению диагоналей.

8. $\frac{153}{16\sqrt{35}}$. **Указания.** Обозначить $\angle LKM = \angle LNM = \alpha$ и $\angle KLN = \angle KMN = \beta$. С помощью теоремы косинусов записать двумя способами длину LM (по аналогии с задачей 9), найти $\cos\alpha$; аналогично, записав дважды KN, найти $\cos\beta$. После этого выразить $\sin\angle LPK = \sin(\alpha+\beta)$. Второй способ решения: треугольники KLP и NMP подобны с коэффициентом подобия 3:5; обозначаем $KP = 3x$, $PN = 5x$, $LP = 3y$, $PM = 5y$. При этом $3x + 5y = 7$, $3y + 5x = 6$. Находим $LP = \frac{51}{16}$, $KP = \frac{27}{16}$.

9. 30^0. **Указания.** BD и AM — высоты в ΔABC, поэтому ΔCDM подобен ΔCBA с коэффициентом подобия $k = \cos\angle C$ (докажите). С другой стороны, $k^2 = \frac{S_{CDM}}{S_{CBA}} = \frac{1}{4}$. Учитывая, что $\angle C$ острый, его величина равна 60^0. Тогда искомый угол равен 30^0.

10. $\frac{8R^3}{b}$. **Указания.** Из параллельности хорды следует, что трапеция равнобокая. Её площадь равна $p\cdot R = 2l\cdot R$ (здесь p и l соответственно полупериметр и боковая сторона). Из подобия несложно получить: $\frac{2R}{l} = \frac{b}{2R}$.

Глава 3. § 3.2

1. $\sqrt{2/3}$. **Указания.** Используя теоремы о сумме углов вписанного в окружность четырёхугольника, о дугах, стягиваемых равными хордами, свести задачу к расчёту ΔABD с тремя известными элементами.

2. 28/5. **Указания.** Доказать, что точки A, D, E и C лежат на одной окружности, после чего обосновать подобие треугольников ADO и OEC, DOE и AOC.

3. 5. **Указания.** Доказать, что ΔKMN — правильный со стороной $KM = \sqrt{19}$. Далее по теореме косинусов из ΔKLN найти LN.

4. $\sqrt{7}$. **Указания.** Доказать, что для вписанного четырёхугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями выполняется равенство $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = 4R^2$, где R — радиус описанной окружности.

5. 1. **Указания.** Обозначив $LM = a$, получим $KN = 3a$, $KL = MN = 2a$ (доказать!). После этого выразить высоту трапеции и её площадь через a.

6. $\frac{7\sqrt{35}}{2}$. **Указания.** Трапеция равнобокая (доказать), нижнее основание равно 7 (доказать). Показать, что искомый пятиугольник состоит из четырёх равных прямоугольных треугольников с катетами $7/2$ и $\sqrt{35}/2$.

7. $2\sqrt{3}$. **Указания.** Показать, что углы OMC и OEC — прямые. Поэтому исходный треугольник — правильный.

8. 2/3. **Указания.** Описать окружность вокруг $ABMP$. Показать, что ΔABC — равнобедренный и в ΔPCB имеем отношение: $PC : CB = 1 : 2$.

9. $90°; 20°$. **Указания.** Построить точку D_1, симметричную D относительно AC; показать, что D_1 принадлежит окружности, описанной вокруг ΔABC. Поэтому $\angle AFC$ (F — точка пересечения AD и BC) равен $180^0 - \angle FAC - \angle ACB = 180^0 - \angle CBD_1 - \angle ACB = 90^0$. Затем воспользоваться соотношением: $\frac{AD}{BC} = \frac{AH}{BH} = \operatorname{tg}\angle ABH$ (следует из подобия треугольников ADH и BHC).

10. $2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. **Указания.** $\angle OBM = \frac{\angle B}{2} + \angle CBM = \frac{\angle B}{2} + \angle COM = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^0$. Кроме того, $\angle BOC = 180^0 - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 180^0 - \frac{150^0}{2} = 105^0$. Поэтому $OM = 2R = \frac{BC}{\sin 105^0} = \frac{2}{\sin\left(60^0 + 45^0\right)}$.

Глава 3. § 3.3

1. 2. **Указания.** Искомое расстояние — медиана BM в ΔBO_1O_2 или средняя линия в трапеции $C_1O_1O_2C_2$, т. к. точки B и M (середина O_1O_2) являются центрами окружностей, описанных вокруг прямоугольных треугольников AC_1C_2 и BO_1O_2 соответственно.

2. 1. **Указания.** Доказать, что окружность, описанная вокруг ΔABC, является вписанной в прямоугольный $\Delta O_1O_2O_3$.

3. $\frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{3}}{6}$. **Указания.** Рассмотреть два возможных случая — когда вершина треугольника лежит внутри квадрата и вне его.

4. 10. **Указания.** Построить характеристический прямоугольный треугольник, в котором известен один катет и отношение гипотенузы и второго катета. Заметим, что при этом не имеет значения, пересекаются ли окружности, касаются ли они или же не имеют общих точек.

5. 7. **Указания.** Обозначив через r — искомый радиус, через A, B — точки пересечения окружностей с O_1O_2, через O_3 — центр вписанной окружности, через C — середину AB, получим: $O_1A = AB = 16$, $AC = 8$, $O_1C = 24$. Тогда из прямоугольного ΔO_1CO_3: $(32-r)^2 = 24^2 + r^2$.

6. а) $30°$; б) $3+\sqrt{33}$; в) $6\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)$. **Указания.** а) Если O — центр третьей окружности, то $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{180^0 - 120^0}{2}$. б) Радиус r находится по теореме косинусов из ΔO_1O_2O со сторонами 6, $r-2$, $r-4$ и углом 60^0. в) Искомая площадь находится как $S_{OAB} - S_{OO_1O_2} + S_{DAB}$.

7. $2\sqrt{3}-2$. **Указания.** Высота DC прямоугольного треугольника O_1O_2D находится как $\sqrt{O_1C \cdot CO_2} = \sqrt{2 \cdot 6} = 2\sqrt{3}$. Тогда $O_1D = 4$, $O_2D = 4\sqrt{3}$. Далее воспользоваться формулой $r = \frac{a+b-c}{2}$ (или $r = \frac{S}{p}$).

8. $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$. **Указания.** Обозначим искомый радиус через x, центр вписанной окружности через O_1, а его проекцию на OA через N. Тогда $ON = \sqrt{(2+x)^2 - x^2} = 2\sqrt{1+x}$. С другой стороны, $x = (OA - ON) \cdot \operatorname{tg}\frac{\angle OAK}{2}$. Учитывая, что $OA = \frac{2}{\sin 60^0} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, получим уравнение: $4 - 3x = 2\sqrt{3(1+x)}$.

9. $4\sqrt{3}+10\pi$. **Указания.** Треугольники AKB, BMO (здесь O — центр большей окружности), MKB — прямоугольные. Поэтому $MB = \frac{MK}{\cos 15^0} = 2$; $MO = \frac{MB}{\operatorname{tg}30^0} = 2\sqrt{3}$ (докажите, что $\angle MOB = 30^0$). Нужная площадь находится как сумма площадей двух равных прямоугольных треугольников MOB и NOB и площади сектора (он составляет $\frac{5}{6}$ площади большего круга).

10. $\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}$. **Указания.** Обозначим центры первой и второй окружности через O_1 и O_2. Показать, что точки O_1, O_2 и D лежат на одной прямой и при этом $O_1O_2 = 2\sqrt{2}$. Из характеристического треугольника найти $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (здесь α — угол между O_1D и AD). После этого, показав, что $BC + AD = CD$, получить $S_{ABCD} = CD \cdot \sqrt{6} = \frac{AB}{\sin 2\alpha} \cdot \sqrt{6} = \frac{12}{\sin 2\alpha}$.

Глава 4

1. 16. **Указания.** Из условия и теоремы Пифагора следует, что $a^2+b^2=c^2=400$.

2. 25π. **Указания.** Решить систему уравнений: $\frac{ab}{2}=24$; $a+b+c=24$; $a^2+b^2=c^2$. Ее решение: $a=6$ (или 8), $b=8$ (или 6), $c=10$.

3. 12. **Указания.** Медиана равна половине гипотенузы; катеты обозначим $2x$ и $3x$. Тогда $4x^2+9x^2=26^2$, $x=2\sqrt{13}$.

4. (1). **Указания.** $CB=2$; CD находится по теореме косинусов для ΔCBD.

5. $\sqrt{2pq}-p$; $\sqrt{2pq}-q$; $p+q-\sqrt{2pq}$. **Указания.** Условие задачи означает, что $b+c=p$; $a+c=q$ (a,b — катеты; c — гипотенуза).

6. 3. **Указания.** Гипотенуза равна удвоенному радиусу описанной окружности.

7. 12. **Указания.** По теореме Пифагора: $x^2+5^2=(x-2+3)^2$ (здесь x — искомый катет).

8. $6r$; $\frac{5r}{2}$. **Указания.** Обозначим катеты $5a$ и $12a$. По теореме Пифагора: $(5a)^2+(12a)^2=(5a-r+12a-r)^2$. Для записи гипотенузы воспользовались теоремой о равенстве отрезков касательных. При этом $5a>r$.

9. (1). **Указания.** Гипотенуза равна 10. Обозначив один из катетов через x, показать, что по теореме о касательных второй катет равен $14-x$. Тогда $x^2+(14-x)^2=10^2$.

10. 270. **Указания.** По теореме о биссектрисе угла треугольника: $\frac{a}{c}=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$ (здесь a и $b=10+26=36$ — катеты; c — гипотенуза); поэтому: $(5x)^2+36^2=(13x)^2$.

11. $\frac{625}{21}=29\frac{16}{21}$ см^2. **Указания.** Гипотенуза прямоугольного треугольника EDC с катетами 4 и 3 равна 5, а острый угол равен $\frac{\beta}{2}$, где $\beta=\angle ABC$. Находим последовательно $\sin\frac{\beta}{2}, \cos\frac{\beta}{2}, \sin\beta, \cos\beta$, BC, AC и искомую площадь.

12. 6. **Указания.** Последовательно находим $AC=4\sqrt{5}$, $AB=9$, $BF=\frac{1}{2}$. Треугольники ABC и DBF подобны.

13. 90^0; $\arcsin\frac{3}{5}$; $\arcsin\frac{4}{5}$. **Указания.** Записать теорему Пифагора для треугольника со сторонами $a-d$, a, $a+d$.

14. 2 и 3. **Указания.** Из прямоугольного ΔAMH находим $AM=\frac{\sqrt{13}}{2}$ (поэтому $BC=2AM=\sqrt{13}$), $MH=\frac{5}{2\sqrt{13}}$. Поэтому $HC=\frac{4}{\sqrt{13}}$ (для определённости принято, что $AC<AB$), $AC=2$ (по теореме Пифагора).

15. а) $\arcsin\frac{3}{5}$; $\arcsin\frac{4}{5}$; б) 12. **Указания.** Решить уравнение: $(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$.

16. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Указания.** Обозначив $\angle KMD$ через α, а $\angle MKD$ через β, получим по теореме синусов $\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\beta}$; $\frac{1}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{\sqrt{2}}{\sin(90^\circ-\beta)}$. Поэтому $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$; $\cos\beta=\sqrt{2}\cos\alpha$. Отсюда $1=\cos^2\beta+\sin^2\beta=2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$, и, значит, $\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$.

17. $\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}$. **Указания.** Если $\alpha=\beta-\gamma$ и $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, то $\beta=90^\circ$. Поэтому $1^2+b^2=c^2$ и $b^2+c^2=2\cdot\pi\frac{c^2}{4}$. *Примечание.* Эта задача предлагалась в 1977 г. на вступительном экзамене факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова.

18. 40. **Указания.** Треугольника со сторонами 100, 40, 40 не существует.

19. 2 см. **Указания.** Если a — боковая сторона, то $\frac{1}{2}a^2\sin120^\circ=4\sqrt{3}$; $a=4$. Поэтому $h=a\cdot\cos\frac{120^\circ}{2}$.

20. $h^2\sqrt{3}$. **Указания.** Показать, что половина угла при вершине равна 60°.

21. а) $\angle A=\angle C=\operatorname{arctg}3$, $\angle B=\pi-2\operatorname{arctg}3$; б) 4. **Указания.** Провести через B медиану BH, обозначить $DH=x$, тогда $HC=AH=x$, $BD=2x$, $\operatorname{tg}A=\frac{3x}{x}=3$. Учитывая, что $NM=x$ и $NM\perp BH$, получим $\frac{1}{2}\cdot2x\cdot x=4$, т. е. $x=2$.

22. а) 4; б) $4\left(\sqrt{5}+2\right)$. **Указания.** Обозначив $NL=x$, получим из теоремы о биссектрисе: $\frac{KM}{ML}=\frac{KN}{NL}$ или $\frac{4+x}{4}=\frac{4}{x}$. Отсюда $x=2\sqrt{5}-2$.

23. $\frac{5}{4}$ см. **Указания.** Расстояние от середины основания до точки пересечения биссектрис равно $\frac{10}{3}$, а до точки пересечения высот — $\frac{25}{12}$.

24. 70^0. **Указания.** Если обозначить $AB = AC = a$, то $BC = 2a\sin\frac{80^0}{2}$. Тогда по теореме синусов $MC = BC\cdot\frac{\sin 30^0}{\sin\left(180^0 - 30^0 - 10^0\right)} = a$.

25. 150^0. **Указания.** Если обозначить $\angle KLO = \alpha$, $KO = a$, то $OM = \frac{a}{2\sin 10^\circ}$, $OL = \frac{a\sin 40^\circ}{2\sin 10^\circ \sin(80^\circ - \alpha)}$, а, с другой стороны, $OL = \frac{a\sin 20^\circ}{\sin\alpha}$. Поэтому $\sin 40^\circ \sin\alpha = 2\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin(80^\circ - \alpha)$. Отсюда $\alpha = 10^\circ$, $\angle KOL = 180^\circ - 20^\circ - 10^\circ = 150^\circ$. Более короткий способ решения показан в предыдущей задаче.

26. 1. **Указания.** Обозначить $\angle ACD = \alpha$. Выразить через α последовательно DE, $\angle BAC$, $\angle DEA$ и AD (последнее из теоремы синусов в ΔADE).

27. 3. **Указания.** $\frac{S_{CHA}}{S_{CHB}} = \frac{AH}{BH} = \frac{CH/\mathrm{tg}45^0}{CH/\mathrm{tg}60^0} = \sqrt{3}$.

28. 0,0576. **Указания.** $p = \frac{a+b+c}{2} = 28$; $S_\Delta = 84$; $r = \frac{S}{p} = 3$; $R = \frac{abc}{4S} = 12{,}5$.

29. (3). **Указания.** Из теоремы синусов $\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$ находим $\sin\angle B = 1$. Отсюда $\angle B = 90^0$, $\angle C = 30^0$.

30. $\sqrt{b(b+c)}$. **Указания.** Из теоремы синусов $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\left(180^0 - 3\beta\right)}$ находится $\sin^2\beta = \frac{3b-c}{4b}$.

31. 120^0. **Указания.** Применить теорему косинусов к каждому из двух треугольников, на которые медиана разбивает исходный треугольник.

32. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$. **Указания.** Площадь исходного треугольника выразить по формуле Герона. Использовать $S_{ADE} = \frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}\cdot S_{ABC}$

33. $\frac{\sqrt{3}}{2\sin 15^0} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{6+3\sqrt{3}}$. **Указания.** Показать, что в треугольниках ABK и BCK углы, противолежащие их общей стороне BK, связаны соотношением $\angle BAK + \angle BCK = 90^0$. Поэтому, записав, для каждого из этих треугольников теорему синусов, получим искомую длину.

34. 16. **Указания.** Провести $DG \parallel AF$ ($G \in [FC]$). Тогда $FG = BF$, $GC = FG$ (теорема Фалеса).

35. $\frac{1}{16}$. **Указания.** Если провести $AF \| KE$ $(F \in EC)$ и обозначить $EC = a$, то $EF = \frac{a}{5}$, $BE = 3a$. Поэтому $\frac{AM}{MB} = \frac{EF}{BE} = \frac{1}{15}$. Ещё проще воспользоваться теоремой Менелая.

36. а) 1 : 3; б) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{8}}$. **Указания.** а) Обозначив $S_{EBG} = S$, обосновать цепочку равенств $S_{AEG} = S$, $S_{BGF} = S_{GFC} = 2S$, $S_{ABC} = 12S$. б) Выразить через переменные $x = EG$ и $\alpha = \angle GCA$ все стороны и угол EGA в ΔEGA, после чего записать теорему косинусов для этого треугольника.

37. 1; 5/2. **Указания.** Обозначив $KB = x$, $BD = y$, по теореме о биссектрисе имеем: $\frac{5/3 + x}{5} = \frac{y}{5/2}$ и $\frac{5/3}{x} = \frac{5}{5/2 + y}$. Найдя x и y, приходим к выводу, что треугольник — прямоугольный.

38. 1) 60^0; 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **Указания.** 1) Напомним, что угол между биссектрисами и соответствующий угол треугольника связаны между собой (см. § 1.4) и эту связь нужно уметь выводить. 2) В задачах, где известны несколько углов, часто бывает разумно сконцентрировать внимание именно на углах, найдя те из них, которые возможно. Так, в нашей задаче несложно определить $\angle FCA$, $\angle FDL$ (заметив предварительно, что точки F, D, C и L лежат на окружности), $\angle DFC$ и, как следствие, $\angle CFL$, а также $\angle FAC$. В результате получим, что ΔABC – прямоугольный.

39. $\frac{5\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+1\right)}{2}$ или $\frac{75\sqrt{3}}{38}$. **Указания.** Стороны треугольника равны: 5; $2x$ и $3x$. Напротив тупого угла может лежать как сторона 5, так и сторона $3x$. Неизвестная x находится с помощью теоремы косинусов.

40. $2 - \sqrt{2}$. **Указания.** Обозначив $AB = x$, получим $PB = 4 - 2x$ и по теореме о биссектрисе $\frac{4-2x}{4} = \frac{PQ}{QR} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{3\pi}{4}}$ (последнее соотношение можно доказать, например, используя равенство площадей треугольников PQA и QRA).

41. $25\sqrt{3}$; $75\sqrt{3}$. **Указания.** Выразить через $\alpha = \angle CDA$ углы $\angle BDA$, $\angle DBA$ и показать, что треугольники CDA и DBA подобны, откуда $AC \cdot AB = 10^2$. Теперь $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin 120^0 = 25\sqrt{3}$, а площадь ΔBDC равна сумме площадей ΔCDA, ΔBDA и ΔABC и равна $25\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sin 120^0 \cdot AD \cdot (AB + AC)$. Она минимальна при условии $AB + AC = 2\sqrt{AB \cdot AC} = 20$.

42. 60. **Указания.** Т. к. BP — биссектриса ΔMBC, то $BM = 3x$; $BC = 5x$. Отсюда $(3x)^2 + 8^2 = (5x)^2$, и $x = 2$. Если $\angle MBP = \angle PBK = \frac{\alpha}{2}$, то $\angle PCK = 90° - \alpha$, $\angle CPK = \angle PKC = 45° + \frac{\alpha}{2}$, $\angle MPA = 45° + \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $AM = 3\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) = 9$, $S_{ABC} = \frac{AB \cdot MC}{2}$.

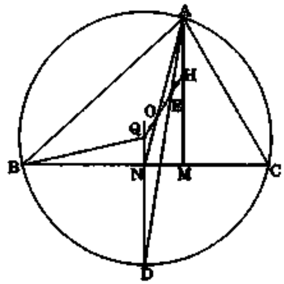
43. а) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; б) 4:9. **Указания.** а) Из теоремы косинусов находим $\cos\angle ABC = \frac{1}{8}$. Теперь MN находится из теоремы косинусов для ΔMBN. б) Провести $DE \parallel MN$, $CF \parallel MN$, (точки E и F лежат на AB). Тогда $\frac{AE}{EF} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{3} = 1$, $\frac{BM}{FM} = \frac{BN}{NC} = \frac{2}{3}$, а поэтому $FM = \frac{3}{2}$, $AF = AM - FM = \frac{3}{2}$, $AE = EF = \frac{3}{4}$. Искомое отношение равно отношению $BM : ME$.

44. 25. **Указания.** Если обозначить через O точку пересечения медиан, то $AO = 10/3$, а площадь ΔAOC равна 25/9.

45. 14. **Указания.** Расстояние от точки K до сторон равно 3. Поэтому площадь треугольника равна $\frac{MN \cdot 3}{2} + \frac{LN \cdot 3}{2}$.

46. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см^2. **Указания.** Проведя $ML \| AH$ до пересечения с BC в точке L, получим $ML = \frac{1}{2}$ и $\sin\angle MBL = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle MBC = 30°$, $\angle BOH = 60°$ (O – точка пересечения AH и BM). Поэтому $S_{ABHM} = \frac{1}{2} BH \cdot AH \cdot \sin\angle BOH$ $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

47. 1) $\frac{\sqrt{15}}{10}$; 2) $\frac{\sqrt{15}}{30}$. **Указания.** Обозначим: M — точка пересечения AA_1 и CC_1; N — точка пересечения AA_1 и BB_1; P — точка пересечения BB_1 и CC_1; $\alpha = \frac{\angle BAC}{2}$; $\beta = \frac{\angle ABC}{2}$. Тогда $\sin\beta = \cos 2\alpha = \frac{1}{4}$. Далее последовательно находятся $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, CC_1, AC_1, AM, AN, C_1M, PC. Искомые площади находятся по формулам: $S_1 = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin\alpha$, $S_2 = \frac{1}{2} MN \cdot MP \cdot \sin\angle NMP$, причём $MN = AN - AM$, $MP = CC_1 - C_1M - CP$, $\angle NMP = \angle AMC_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



48. $\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{15}}$. Указания. Пусть AM – высота, AN – медиана, QN – серединный перпендикуляр к BC. Тогда из подобия следует $\frac{HO}{OQ}=\frac{AO}{ON}=\frac{2}{1}$. Если теперь провести высоту и медиану из вершины B, то аналогично получим $\frac{HO}{OQ_1}=\frac{BO}{ON_1}=\frac{2}{1}$ (здесь N_1 — середина AC, Q_1 — точка пересечения HO и серединного перпендикуляра к AC). Это означает, что точки Q и Q_1 совпадают, а значит, Q — центр описанной окружности. Поэтому QD, QB – радиусы (причем AD – биссектриса $\angle A$, т.к. дуги BD и DC равны), $\frac{QN}{AH}=\frac{OQ}{HO}=\frac{1}{2}$, $\frac{QD}{AH}=\frac{EQ}{HE}=\frac{2}{1}$. Значит, $QN=\frac{QD}{4}$, $\cos\alpha=\frac{QN}{QD}=\frac{1}{4}$ (здесь $\alpha=\angle BAC=\angle DQC$). Если обозначить $\beta=\angle B$, то $\angle C=\beta+30°$, и $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\beta=\frac{BC^2\cdot\sin(\beta+30°)\cdot\sin\beta}{2\cdot\sin\alpha}$ $=\frac{BC^2}{4\cdot\sin\alpha}\left(\cos 30°-\cos(2\beta+30°)\right)=\frac{BC^2}{4\cdot\sin\alpha}(\cos 30°-\cos(180°-\alpha))$.

49. $30°, 30°, 120°$. Указания. Условие означает, что $QN=QL=a$, $QP=QM=2a$, а углы PQM и NQL равны.

50. 45. Указания. Если обозначить стороны как $a-d$, a, $a+d$, то периметр равен $3a$, поэтому $a<20$ и, значит, $KM=a+d=21$. По теореме синусов $\sin\angle L=\frac{KM}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и, ввиду того, что $\angle L$ — наибольший угол в треугольнике, $\angle L=120°$. Далее по теореме косинусов: $d=\frac{2}{5}a$.

51. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. Указания. Обозначим вершины квадрата через P, Q, T, R ($P\in AB$, $Q\in BC$). Медиана BD пересекает PQ в середине — обозначим эту точку N. Тогда NO — перпендикулярно основанию AC, пусть NO пересекает AC в точке K. Т.к. $NO=OK$, то $BM=MH$, т.е. M — середина высоты. Поэтому площадь искомого треугольника равна четверти площади треугольника ABC, которую находим по формуле Герона.

52. 10. Указания. Если x, y — высота и ширина прямоугольника, то из подобия следует $\frac{y}{b}=\frac{h-x}{h}$. Поэтому площадь прямоугольника равна $xy=\frac{bx(h-x)}{h}$. Максимум достигается при $x=\frac{h}{2}$.

53. 28. Указания. Наибольший периметр у равнобедренного треугольника.

54. Указания. Построить b и угол A. Провести биссектрису угла A и на ней по известному радиусу найти центр вписанной окружности. Построив окружность, провести к ней касательную из точки C.

55. 10. Указания. Площадь равна $a^2 \sin B = 320$, поэтому сторона a ромба равна 20. Далее находим $CH = a \cdot \sin B = 16$, $BH = a \cdot \cos B = 12$, $\frac{CK}{KH} = \frac{DC}{BH} = \frac{5}{3}$. Или, по-другому, $CK = a \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$.

56. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **Указания.** $PQRS$ — прямоугольник, диагональ которого равна разности сторон параллелограмма.

57. $\frac{3}{2}$. **Указания.** Провести $AC \parallel MQ$, $C \in MB$. Тогда $\frac{AC}{MQ} = \frac{3}{8}$. Поэтому $\frac{AM}{MN} = \frac{AC}{NB} = \frac{3/8 \cdot NP}{5/8 \cdot NP} = \frac{3}{5}$, и $\frac{AM}{AN} = \frac{3}{2}$.

58. (5). Указания. Стороны $\angle AED$ пересечены параллельными BC и AD, значит, $\frac{FC}{AD} = \frac{EF}{AE} = \frac{7}{10}$, $\frac{BF}{FC} = \frac{3}{7}$. Поэтому $S_{ACD} = \frac{S}{2}$; $S_{ABF} = \frac{3}{10} \cdot \frac{S}{2}$; $S_{AFC} = \frac{7}{10} \cdot \frac{S}{2}$, где S — площадь параллелограмма. Отсюда $\frac{S_{ABF}}{S_{AFCD}} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{S}{2}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{S}{2} + \frac{S}{2}} = \frac{3}{17}$.

59. $2\sqrt{5}$ и $2\sqrt{29}$ см или $0{,}4\sqrt{5}$ и $5{,}2\sqrt{5}$ см. **Указания.** Т. к. $\frac{BD}{\sin A} = 2R_{ABD}$, то $BD = 2\sqrt{10} \sin A$. Из теоремы косинусов для ΔABD получим квадратное уравнение относительно $\cos A$, решения которого $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos A = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

60. 1320. Указания. Расстояние между AB и CD равно $5 + 6 = 11$. Поэтому $S_{ABCD} = AB \cdot 11$. С другой стороны, $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot r$ $= (AB + AB + 12 + 12) \cdot 5$.

61. $2\sqrt{2}$. **Указания.** Если r — радиус вписанной окружности, то высота трапеции равна $2r$. Тогда боковая сторона равна $4r$. Наличие вписанной окружности означает, что сумма оснований равна сумме боковых сторон, т. е. $8r$. Поэтому площадь трапеции равна $\frac{8r \cdot 2r}{2} = 8r^2 = 64$.

62. 6,4. Указания. Искомое расстояние равно длине средней линии трапеции, умноженной на синус угла при основании.

63. (1). **Указания.** Высота, проведённая через точку пересечения диагоналей, равна: $\frac{a}{2}\operatorname{tg}22{,}5^\circ + \frac{b}{2}\operatorname{tg}22{,}5^\circ$ (здесь a и b — основания трапеции). Тогда средняя линия равна $\frac{a+b}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}22{,}5^\circ}$.

64. 9. **Указания.** Большая боковая сторона равна 5 (равнобедренный треугольник).

65. 204. **Указания.** Боковые стороны трапеции равны 12 и 20; основания равны 9 и 25.

66. 22. **Указания.** Из первых двух условий находятся боковая сторона и разность оснований. Третье условие после этого позволяет найти меньшее основание.

67. 24. **Указания.** Пусть высота трапеции равна h. Тогда большая боковая сторона равна $2h$, а основания равны x и $x + h\sqrt{3}$. При этом $3h + h\sqrt{3} + 2x = 24$. Максимум площади достигается при $h = 4$.

68. $\frac{6}{7}\sqrt{10}$. **Указания.** Провести через вершину меньшего основания прямую, параллельную диагонали. Тогда искомая высота будет высотой в треугольнике с основанием 14 и боковыми сторонами 13 и 3.

69. 4 см. **Указания.** Обозначим основания трапеции через a и b, данный отрезок через c, высоту трапеции через h. Тогда из подобных треугольников доказывается соотношение $c = \frac{2ab}{a+b}$. Находим $a = 10$, а затем h.

70. 150. **Указания.** Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, равна полуразности оснований.

71. 3. **Указания.** Если N — середина DE, то $MN = \frac{5}{2}$. Т. к. $\angle MEN = \angle MEB = \angle NME$, то $NE = MN = \frac{5}{2}$, $DN = NE = \frac{5}{2}$. Т. к. $DN = NE = MN$, то $\angle DME$ — прямой, и DM находится по теореме Пифагора.

72. 4. **Указания.** Провести PQ и RS до пересечения. Три окружности окажутся вписанными в три подобных треугольника.

73. $\sqrt{a(a-b)}$. **Указания.** Следует обратить внимание на то, что угол между хордой и касательной – геометрический модуль, очень часто выводящий решение на конфигурацию, в которой присутствуют подобные треугольники. Поэтому, если в задаче этот угол существует, то почти всегда следует поискать один или несколько равных ему углов. В нашей задаче равенство углов $\angle BCE$, $\angle EAD$ и $\angle FED$ углу между хордой BE и касательной FE сразу же приводит к появлению конструкции с «вложенными» друг в друга подобными треугольниками с общим углом AFE.

74. $4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$. **Указания.** Если соединить последовательно середины сторон четырёхугольника, получится параллелограмм со взаимно перпендикулярными диагоналями, т. е. ромб. Значит, диагонали исходного четырёхугольника равны между собой и его площадь равна $\frac{1}{2}PR^2\cdot\sin 165°$. Поэтому $PR^2=\frac{4}{\sin 165°}$.

75. $90°$. **Указания.** Доказать, что в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ середины диагоналей и середины сторон AD и BC являются вершинами параллелограмма, диагонали которого по условию равны, т.е. прямоугольника. Стороны этого прямоугольника параллельны сторонам AB и CD.

76. 4. **Указания.** Обозначив площади треугольников BEC, AED и ABE через S_1, S_2 и S соответственно, и используя соотношение $S_1\cdot S_2=S^2$, получим: $S_1+S_2\ge 2\sqrt{S_1\cdot S_2}=2S$. Это означает, что $S_1=S_2=S$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

77. 5 : 9. **Указания.** Равенство синусов углов ABD и ACD, опирающихся на один и тот же отрезок AD, даёт возможность с помощью теоремы синусов, применённой к одноимённым треугольникам, перевести поиск искомого отношения к определению равного ему отношения $\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle CDA}$, которое уже несложно определить с помощью заданных условий и теоремы синусов, применённой к ΔMKD и ΔMCD.

78. $\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{11\pi}{12}$ или $\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{12};\arccos\frac{1}{2\sqrt{11+6\sqrt{3}}};\frac{11\pi}{12}-\arccos\frac{1}{2\sqrt{11+6\sqrt{3}}}$.

Указания. В условии задачи задан не четырёхугольник $ABCD$, а четырёхугольник с вершинами в точках A, B, C, D. Поэтому нужно рассмотреть три разных четырёхугольника: $ABCD$; $ACBD$; $ABDC$.

79. **Указания.** Площадь треугольника равна $S_\Delta=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, поэтому $S_\Delta\le\frac{1}{2}ab\le\frac{1}{2}$. Четырехугольник состоит из двух треугольников.

80. $\left(\pi;\frac{5\pi}{3}\right)$. **Указания.** Во вписанном четырёхугольнике $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$. Поэтому (с точностью до обозначений) углы равны $\gamma+3d$, $\gamma+2d$, $\gamma+d$, γ, причем $2\gamma+3d=\pi$. Отсюда $d\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$. Искомая сумма равна $2\gamma+5d=\pi+2d$.

81. 22/3. **Указания.** Если одну из сторон отсекаемого треугольника обозначить через x, а вторую через y, то $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=8$, $x\in[0;2]$, $y\in[0;5]$.

Отсюда $y=\dfrac{8(4-x)}{8-x}$. Поэтому площадь оставшейся части прямоугольника равна $10-\dfrac{xy}{2}=10-\dfrac{4x(4-x)}{8-x}=\dfrac{4x^2-26x+80}{8-x}$. При $x\in[0;2]$ это убывающая функция, поэтому ее минимум достигается при $x=2$ и равен $\dfrac{22}{3}$.

82. 13. **Указания.** Из неравенств $151n\le180(n-2)\le153n$ следует $\dfrac{360}{29}\le n\le\dfrac{360}{27}$.

83. 7. **Указания.** По теореме о пересекающихся хордах (здесь r – искомый радиус): $(r-5)(r+5)=4\cdot6$.

84. 13. **Указания.** По теореме о касательной и секущей находится длина внешнего отрезка секущей: 8. После этого по теореме Пифагора: $R^2=5^2+\left(\dfrac{32-8}{2}\right)^2$.

85. 30^0. **Указания.** Из равенства площадей $S_{ABF}=S_{ACF}$ и условия следует: $S_{BDF}=S_{ADE}$, а отсюда $S_{ABE}=S_{BCE}$, т. е. BE – медиана в ΔABC. Из равенства углов $\angle ABD=\angle BCD=\angle DBC$ следует, что BE – также и биссектриса в ΔABC, а значит, $AB=BC$. Поэтому ΔABC – правильный, $\angle ACB=60^0$.

86. 264; 504. **Указания.** Радиус окружности равен 25, расстояние от центра до прямой AB равно 24 (теорема Пифагора). Учесть, что точки A и B могут лежать как с одной стороны от хорды, так и по разные стороны. С помощью теоремы о секущих определить длину отрезка AB.

87. $\sqrt{pq}$. **Указания.** Обосновать равенство величин углов: $\angle QMA=\angle ANM=\angle BMN=\angle MQB$, из чего сразу же следует подобие треугольников MPN и MNQ.

88. 21^0, $8\sin69^0$, одинаковы. **Указания.** Обозначим через D точку пересечения AM с окружностью; через E — точку пересечения продолжения MC с окружностью. По теореме о касательной и секущей $BM^2=AM\cdot DM$, а по условию $BM^2=AM\cdot CM$, поэтому $DM=CM$. Аналогично $AM=EM$. Значит, $\Delta ODM=\Delta OCM$, $\angle AMO=\dfrac{1}{2}\angle AMC=21^0$, точки A и E симметричны относительно прямой OM. Т. к. $OM\perp AE$, то $\angle AEM=90^0-\angle OME=69^0$. Поэтому $AC=2R\cdot\sin\angle AEC=8\sin69^0$. Углы AOM и ACM равны ввиду того, что точки A, M, C и O лежат на одной окружности (т. к. $\angle AOC=2\angle AEM=180^0-2\angle OME=180^0-\angle AMC$).

89. $300\sqrt{3}$ мм^2. **Указания.** Расстояние от вершины угла до центра окружности равно 60 мм, а высота отсеченного треугольника равна этому расстоянию за вычетом радиуса окружности, т. е. 30 мм.

90. 18. **Указания.** Доказать, что ΔOAB подобен ΔOMN с коэффициентом подобия $\dfrac{3}{\sin\angle AOB}$. Поэтому $MN = AB\cdot\dfrac{3}{\sin\angle AOB} = 3\cdot 2R$, где R — известный радиус описанной около OAB окружности.

91. $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}r$. **Указания.** Если x — длина хорды, то расстояние от центра большей окружности до хорды равно $y=\sqrt{(2r)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$. Тогда из треугольника с гипотенузой, равной меньшему радиусу, и катетами, лежащими на линии центров и хорде, следует: $\left(\dfrac{x}{6}\right)^2+(r-y)^2=r^2$. Решая это уравнение, находим x.

92. а) 6; б) 2. **Указания.** Пусть MN — общая касательная к окружностям в точке A — пересекает BD в точке M. Тогда (по свойствам углов между касательной и хордой, вписанных углов, вертикальных и т.п.) имеет место равенство следующих углов: $\angle ABM = \angle BAM = \angle NAC = \angle CEA$; $\angle ADB = 180^\circ - \angle ADE = \angle ACE$. Поэтому равны и углы: $\angle BAD = \angle CAE = \angle BAF$ (F — точка пересечения прямой EA с другой окружностью). Далее из подобия треугольников BCE и ECA следует $BC : CE = CE : AC$, поэтому $CE = \sqrt{BC\cdot AC} = 6$. BA — биссектриса угла FAD, поэтому центр O третьей окружности лежит на BA. Т.к. он лежит и на биссектрисе угла ADB, то $AO{:}OB = AD{:}BD = AC{:}CE = 2{:}3$. Поэтому $AO = 2$.

93. 65 : 144. **Указания.** Обозначим: r и R – радиусы окружностей с центрами M и N соответственно; C — точка касания окружности радиуса R с отрезком OA; $\angle AOB = \alpha$. Тогда $\angle AOM = \angle MOB = \alpha/2$, $\angle NOC = 90^\circ - \alpha/2$, $\angle NAC = 45^\circ + \alpha/4$. Из прямоугольных треугольников OAM и ONC получаем $\dfrac{r}{R}=\dfrac{13\sin(\alpha/2)}{12\sin(90^\circ-\alpha/2)}=\dfrac{13}{12}\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Далее $OA=\dfrac{r}{\mathrm{tg}(\alpha/2)}=\dfrac{13R}{12}$, а, с другой стороны, $OA = OC + AC = \dfrac{R}{\mathrm{tg}\left(90^\circ-\alpha/2\right)}+\dfrac{R}{\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha/4)}$. Поэтому $\dfrac{13}{12}=\dfrac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}+\dfrac{1+\cos\left(90^\circ+\alpha/2\right)}{\sin\left(90^\circ+\alpha/2\right)}=\dfrac{1}{\cos(\alpha/2)}$. Значит $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5}{12}$.

94. $\dfrac{9\pi}{14\pi-6\sqrt{3}}$. **Указания.** Если соединить отрезком центры окружностей, а также точки пересечения окружностей с их центрами, то получатся два симметричных треугольника со сторонами $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ и 3. Углы в них равны 30°, 30° и 120°. Вписанный круг имеет диаметр 3, а площадь общей части считается как сумма площадей двух сегментов (в одном центральный угол будет равен 60°, в другом — 240°).

95. Указания. Радиус вписанного круга равен 1, его площадь равна π. Утверждение справедливо, т. к. $\dfrac{25}{8}<\pi$.

96. $\dfrac{3}{\sqrt{17}}$. **Указания.** Искомый радиус равен высоте ΔAOC, две стороны которого известны, а угол между ними равен $\dfrac{3\pi}{4}$.

97. 3. **Указания.** Гипотенуза треугольника равна $2\sqrt{3}$, а один из катетов в $\sqrt{3}$ раз больше другого.

98. 108. **Указания.** Обозначить $BM = 3x$; $MC = 5x$. Тогда $HC = MC = 5x$; $AH = 10x$; $AB = AH + BM = 13x$.

99. $3+\sqrt{3}$; $2\left(3+\sqrt{3}\right)$; $3\left(1+\sqrt{3}\right)$. **Указания.** По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BMN = \angle BNM = \dfrac{\cup NM}{2} = \angle NKM = 45^0$. Поэтому $\angle B = 90^0$. Аналогично $\angle C = 60^0$, $\angle A = 30^0$. Обозначив $NM = x$, по теореме синусов получим $KM = \dfrac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $NK = \dfrac{2x\sin 75^0}{\sqrt{2}} = \dfrac{x\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$. По известному произведению сторон найдём $x^3 = 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}$, поэтому $x=\sqrt{6}$. Далее $MC = KC = KM = \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3$, $BM = BN = \dfrac{NM}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$. Поэтому $BC = 3+\sqrt{3}$, $AC = 2\cdot BC$, $AB = \sqrt{3}\cdot BC$.

100. 42 см. **Указания.** $AB : AC = BD : DC = 5 : 4$; $AB : AE = BO : OE = 5 : 2$, поэтому $AC = 2AE$, а значит BE — медиана, т. е. ΔABC — равнобедренный.

101. $2l\sqrt{4-l^2}$. **Указания.** Доказать, что треугольник прямоугольный.

102. $\sqrt{3}$. **Указания.** $\angle BCD = \angle DEB = 105^0$, $\angle ACD = 75^0$, $\angle ADC = 15^0$. Поэтому $\angle CBE = 15^0$, $\angle BCE = 120^0$, $\angle CEB = 45^0$. Обозначив стороны ΔCBE через a, b, c, получим $\dfrac{a}{\sin 15^0} = \dfrac{b}{\sin 120^0} = \dfrac{c}{\sin 45^0} = 2R$. Выразив a, b, c через R, найдем выражение для периметра через R.

103. а) $5\sqrt{2}$; б) $\frac{\pi}{4} \pm \arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}$. **Указания.** а) В условии задан классический вариант подобия «вложенных» друг в друга треугольников. б) Т. к. $ML^2 = KM \cdot NM$, то L – точка касания LM с окружностью, описанной вокруг ΔKLN. Искомый угол KML является суммой (или разностью) углов OMK и OML (здесь O – центр окружности) в зависимости от того, где находится центр O – внутри треугольника KLN или вне его. Сами эти углы вычисляются из соответствующих прямоугольных треугольников.

104. $\frac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. **Указания.** Из цепочки равенств $\angle OBA = \angle OBD + \angle DBA =$

$$\frac{1}{2}\angle CBD + \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CDB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAB) = \frac{1}{2}(\angle OBA + \angle BOA)$$

следует $\angle OBA = \angle BOA$, т. е. $AB = OA = a$.

105. $4\sqrt{3}$. **Указания.** Обосновать равенство углов $\angle RLM = \angle PML = \angle LKM$. Из подобия «вложенных» друг в друга треугольников с общим углом KML получить $RM = 8$. MQ является высотой в прямоугольном ΔMRL с известными катетами.

106. 10. **Указания.** Показать, что прямая, соединяющая центр окружности с вершиной, — биссектриса.

107. $\frac{16\sqrt{6}}{25}$. **Указания.** Обозначим: F — середина AC; AH, CG — высоты. Пусть $AF = x$. Из подобия треугольников ABF, CAG, ACH и известного угла следует $AB = 5x$, $AG = 2x/5$, AC — касательная (из равенства углов, опирающихся на дугу AE). Далее находится $AE = CE$, и из соотношения $\frac{AE}{\sin\angle ABE} = 2R$ находится x. Искомый отрезок находится из соотношения $CD \cdot CB = CA^2$.

108. $2\sqrt{6}$ см. **Указания.** Т.к. $\angle BDA$ прямой (опирается на диаметр), по теореме Пифагора: $AC^2 = AD^2 + DC^2 = \left(AB^2 - BD^2\right) + DC^2 = 6^2 - 4^2 + 2^2$.

109. 10. **Указания.** Треугольники ABC и CBD подобны с коэффициентом подобия 3/2.

110. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **Указания.** $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\alpha$. Поэтому $\alpha = 60^\circ$. Выразив площадь треугольника по формуле $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, найдем bc. Затем по теореме косинусов $\left(a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\right)$ найдем $(b+c)^2$ и $b + c$. После этого $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

111. $\frac{cn}{m}$. **Указания.** Доказать, что $\angle ABC$ равен $\angle MNA$. Поэтому треугольники ABC и ANM подобны.

112. $6\sqrt{3}$. **Указания.** Показать, что $\angle GFK$ равен 60^0 или 120^0 (в зависимости от расположения точки F). Доказать, что $KF^2 = FH \cdot FG$. Это следует из подобия прямоугольных ΔFHE и ΔFKD ($\angle D$ равен половине дуги FE как вписанный, а $\angle E$ — как угол между касательной и хордой) и подобия ΔFEK и ΔFDG.

113. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **Указания.** Квадрат расстояния от точки D до хорды AB равен произведению расстояний от D до лучей CA и CB (см. предыдущую задачу).

114. $\frac{9}{2}$. **Указания.** Из соотношения $CA \cdot CP = CB \cdot CQ$ следует, что $CP = CQ$, а значит, $APQB$ — равнобочная трапеция. Из подобия треугольников CPQ и CAB следует, что $S_{CAB} = 27$, $S_{APQB} = 24$. Если площадь PQD обозначить через x, то $S_{QDB} = 3x$, $S_{ADB} = 9x$, $S_{PDA} = S_{QDB} = 3x$. Поэтому $x + 3x + 3x + 9x = 24$.

115. 30^0; $12(2-\sqrt{3})$. **Указания.** Обозначим $AB = a$, $AC = b$, $BL = 2x$, $AK = 3x$, тогда по теореме о секущей $x = \frac{a}{4}$, $AK = \frac{3a}{4}$, $BK = \frac{a}{4}$, $BL = \frac{a}{2}$. Из того, что $\cup KL = \cup LM$ (M — точка пересечения AC и окружности) следует, что $KM \,||\, BC$. Тогда $\frac{KM}{BC} = \frac{AK}{AB} = \frac{3}{4}$, $KM = 3$. По теореме синусов $\sin A = \frac{KM}{2R} = \frac{1}{2}$, $\angle A = 30^0$ или 150^0. Второй случай невозможен, т. к. тогда расстояние от KM до BC больше, чем от KM до точки A, что неверно. Далее записать теорему косинусов: $4^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 30^0$. Отсюда $16 = (a+b)^2 - 2ab - ab \cdot \sqrt{3}$, $ab = \frac{(a+b)^2 - 16}{2+\sqrt{3}} = \frac{4BC^2 - 16}{2+\sqrt{3}} = \frac{48}{2+\sqrt{3}}$ и $S = \frac{1}{2} ab \sin A = \frac{12}{2+\sqrt{3}}$.

116. $7\sqrt{3}$. **Указания.** По условию $AB > AC$, а значит, центр окружности радиуса $r = 35$ (обозначим его через O) лежит на луче DC. Заметим, что, т. к. AD — биссектриса, то $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ (здесь a, b, c — стороны треугольника) и поэтому $BD = \frac{ac}{c+b}$, $DC = \frac{ab}{c+b}$. Обозначив $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, получим $\angle ADC = \alpha + \beta$ и, т.к. $DO = AO$, то $\angle DAO = \angle ADO = \alpha + \beta$. Отсюда $\angle CAO = \beta$, и, значит, треугольники AOC и BOA — подобны. Поэтому $\frac{AO}{CO}=\frac{BO}{AO}$, или $\frac{r}{r-DC}=\frac{r+BD}{r}$, или $\frac{r}{r-\frac{ab}{a+b}}=\frac{r+\frac{ac}{c+b}}{r}$. Отсюда следует,

что $r\left(c^2-b^2\right)=abc$, а поэтому $R=\frac{abc}{4S}=\frac{r\left(c^2-b^2\right)}{4S}=\frac{35\cdot 216}{4\cdot 90\sqrt{3}}$.

117. а) 25:81; б) площади одинаковы. **Указания.** $\angle BAD=\angle DBC=\angle DFC$, $\angle BCD=\angle BFD=\angle ABD$. Поэтому $\Delta ADB\sim\Delta BDC$, $\angle ADB=\angle BDC$. Значит, $\angle ADE=\angle EDC$, т. е. DE — биссектриса. Поэтому $AE:EC=AD:DC=\frac{5}{9}BD:\frac{9}{5}BD=\frac{25}{81}$. Т. к. $\angle DFC=\angle BAF$, то $AB\parallel FC$, поэтому $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABF}$.

118. $\frac{34}{9}$. **Указания.** Если обозначить диагонали трапеции через x и y, то $x^2+y^2=2\cdot 3^2+2\cdot 5^2$, а также $\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{x}{2}\cdot\left(9-\frac{x}{2}\right)$.

119. 4π. **Указания.** Боковые стороны трапеции равны $\frac{2+8}{2}=5$. Поэтому высота трапеции равна 4, а радиус окружности 2.

120. 3. **Указания.** Если меньшее основание трапеции равно a, а боковая сторона b, то из того, что угол равен 60°, следует, что большее основание равно $a+b$. Т. к. в трапецию вписана окружность, то $a+(a+b)=b+b$. Отсюда $b=2a$. Выразив через a площадь трапеции, найдем $a=2\sqrt{3}$.

121. 50. **Указания.** Если высота трапеции равна h, то боковая сторона равна $2h$. Тогда, обозначив меньшее основание через a, получим из условия того, что сумма оснований равна сумме боковых сторон: $a+a+2h\sqrt{3}=2h+2h$. Отсюда $a=h(2-\sqrt{3})$, и для площади трапеции имеем: $S=\frac{a+a+2h\sqrt{3}}{2}\cdot h=2h^2=25$.

122. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ см. **Указания.** Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями BC и AD, $AB\perp AD$, $OC=4$, $OD=8$ (здесь O – центр вписанной окружности). Тогда $\angle OCD+\angle ODC=\frac{1}{2}(\angle BCD+\angle ADC)=90°$, $\angle COD$ – прямой, $CD=4\sqrt{5}$. Радиус вписанной окружности равен высоте ΔCOD, опущенной из точки O, и равен $\frac{OC\cdot OD}{CD}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. Поэтому $AB=\frac{16\sqrt{5}}{5}$, $\frac{BC+AD}{2}=\frac{AB+CD}{2}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$.

123. а) 5; б) $\frac{50\sqrt{2}}{9}$. **Указания.** Если $AD = 3$, $BC = a$ — основания трапеции, O — центр окружности, $MN = 5$ — хорда, $OM \perp AB$, то $\sin\angle MOK = \frac{5}{2R} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$ (здесь K — середина MN), $\angle BAD = \angle MOK$ (углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Поэтому BD равно $2R\sin\angle BAD = 3\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3\sqrt{3}} = 5$. С другой стороны $BD^2 = h^2 + \left(3 - \frac{3-a}{2}\right)^2$, где h — высота трапеции, равная $\frac{3-a}{2}\cdot \operatorname{tg}\angle BAD = \frac{5(3-a)}{2\sqrt{2}}$. Отсюда находится $a = \frac{1}{3}$ и далее $h = \frac{10\sqrt{2}}{3}$. Отметим, что равенство хорд BD и MN можно также получить из равенства стягиваемых ими дуг окружности, предварительно доказав равенство дуг MB, CN, AM и ND.

124. $8+4\sqrt{6}-10\arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$. **Указания.** В трапеции $ABCD$ основание BC равно $2\sqrt{2}$. При данных в условии высоте и радиусе центр описанной окружности лежит внутри трапеции и основание AD равно $2\sqrt{3}$. Показать, что сегменты, отражённые относительно меньшего основания и боковой стороны, не имеют общих точек внутри трапеции, а сегменты, отражённые относительно большего основания и боковой стороны, пересекаются внутри трапеции. Точки пересечения соответствующих дуг обозначить через M и N и доказать, что $BCNM$ — квадрат. Поэтому искомая площадь — площадь квадрата со стороной $2\sqrt{2}$ без площадей четырёх равных сегментов.

125. (1). **Указания.** Если O — центр окружности, то $OB \perp BC$. А т.к. $BC \parallel AD$, то $OB \perp AD$, а значит, OB проходит через середину AD, т.е. ΔABD — равнобедренный, $AB = BD = 8$. Кроме того, $BC = CD = 5$ (отрезки касательных), $\angle BDA = \angle DBC$; т.е. $\Delta ABD \sim \Delta BCD$. Поэтому $\frac{5}{8} = \frac{8}{AD}$, $AD = \frac{64}{5}$.

126. $15\frac{1}{2}$; 8. **Указания.** По теореме о секущих $AK = 5$, $NC = \frac{3}{2}$. Найдём $LB = BM = x$, $DS = DR = y$. Из известного периметра находим $x + y = 10$. Кроме того, записав двумя способами квадрат высоты трапеции, получим второе уравнение $(7+3+y)^2 - \left(\frac{7}{2}+y-\frac{1}{2}-5\right)^2 = \left(1+\frac{3}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-x\right)^2$. Отсюда $4y+16 = 2x-1$.

127. а) 18; б) $\left(\frac{1}{3};1\right)\cup\left(1;\frac{5}{3}\right)$. **Указания.** а) $\angle CAD=\angle BCA$; CD — касательная, поэтому $\angle ACD=\frac{\cup AC}{2}=\angle ABC$. Это означает, что ΔACD подобен ΔCBA, $\angle BAC=\angle CDA=\frac{\cup AC}{2}$, т. е. AB — тоже касательная. Поэтому $AB^2=BC\cdot BE$, откуда находим $BC=18$. б) Если треугольник ABC со сторонами 12 и 18 существует, то вся заданная в условии конфигурация восстанавливается. Поэтому $\frac{R}{r}=\frac{AC}{BC}\in\left(\frac{18-12}{18};\frac{18+12}{18}\right)=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$. Следует только исключить случай, когда трапеция вырождается в параллелограмм.

128. $\sqrt{7}$. **Указания.** Ответ легко получить из подобия прямоугольных треугольников. Другой способ решения основывается на свойстве вписанного в окружность четырёхугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями: $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=4R^2$ (докажите!).

129. 3. **Указания.** Из параллельности соответствующих отрезков и из того, что четырёхугольник вписан в окружность, следует равенство углов: $\angle ABX=\angle XCD=\angle BXC$, $\angle BXA=\angle CDX=\angle BCX$. Это означает подобие треугольников BXA, CDX и XCB. Поэтому $\frac{AX}{BC}=\frac{BC}{DX}$.

130. $4\sqrt{13}$. **Указания.** Т. к. $\frac{6}{\sin\angle QPR}=2R=10$, то $\sin\angle QPR=\frac{3}{5}$, $\cos\angle QPR=\frac{4}{5}$, $PR=6\cdot\frac{4}{5}\cdot2=\frac{48}{5}$, $QO=6\cdot\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$ (O — середина PR). $PQRS$ — четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, поэтому $48=PR\cdot\frac{QS}{2}$. Отсюда $QS=10$. При этом точки Q и S могут лежать по одну сторону от PR (тогда $SO=10+\frac{18}{5}=\frac{68}{5}$, $PS^2=\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{68}{5}\right)^2=16\cdot13$, $PS=4\sqrt{13}$) или по разные стороны (тогда $SO=10-\frac{18}{5}=\frac{32}{5}$, $PS^2=\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{32}{5}\right)^2=64$, $PS=8$, но точка S лежит на окружности, что противоречит условию).

131. (Б). **Указания.** Это прямая $y=\frac{2}{3}+\frac{x}{3}$.

132. 5. **Указания.** Точка M имеет координаты $\left(\frac{3+7}{2};\frac{3+7}{2}\right)$. Поэтому $\overrightarrow{AM}=(5-1;5-2)=(4;3)$.

133. –3. **Указания.** Показать, что случай, когда медиана, биссектриса и высота выходят из одной вершины треугольника, невозможен. Реализуется ситуация, когда высота выходит из одной вершины, биссектриса — из другой, медиана — из третьей.

134. 10; 4. **Указания.** Вершина B имеет координаты $(6;-5)$.

135. $(7;1{,}5)$. **Указания.** Проекции BC на оси координат в 3,5 раза меньше соответствующих проекций AD.

136. $\left(-\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$. **Указания.** Последовательно выводятся уравнения прямой KN и параллельной ей прямой LM. Обозначив координаты искомой точки через $(a;\ b)$, записываем два условия: M лежит на прямой LM; длина отрезка MN равна длине KL. При этом требуется $LM \neq KN$.

137. 36. **Указания.** Прямая AC имеет уравнение $y=\frac{x}{2}+2$, прямая BD: $y=-x+8$. Их точка пересечения: E (4; 4). Искомая площадь равна сумме площадей треугольников ABC и BCD минус площадь треугольника BEC. При этом основание BC этих треугольников параллельно оси абсцисс.

138. 13. **Указания.** $\overrightarrow{AB}=(4+1;10+2)=(5;12)$.

139. $\arccos\frac{3}{5}$. **Указания.** $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}=\{1;-3\}$. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен $\frac{(\vec{a},\vec{c})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}$.

140. $\arccos\left(-\frac{5}{11}\right)$. **Указания.** С одной стороны, $\vec{a}\cdot\left(5\vec{b}+\vec{c}\right)=5\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=5|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\left(-\frac{7}{11}\right)$, а, с другой стороны, $\vec{a}\cdot\left(5\vec{b}+\vec{c}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|5\vec{b}+\vec{c}\right|\cos x=|\vec{a}|\cdot7\left|\vec{b}\right|\cos x$, где x — искомый угол.

Глава 5

1. (6). 2. (1). 3. $12+6\sqrt{2}$. 4. $9+3\sqrt{3}$. 5. (3). 6. (5). 7. (4). 8. 3π. 9. Половине гипотенузы. 10. $\frac{144}{5}=28{,}8$. 11. 24 см. 12. (4). 13. а) 1; б) $\frac{\sqrt{85}}{2}$. 14. 24. 15. (3). 16. (3). 17. 60. 18. 8; 15. 19. 12. 20. 54. 21. $2\left(\sqrt{3}-1\right)$. 22. $\pi-2$. 23. $\frac{5}{2}$. 24. (1). 25. 108. 26. 96. 27. 18. 28. 1; 1; $\sqrt{3}$. 29. 7. 30. (4). 31. $\frac{9\sqrt{15}}{4}$. 32. Либо $S=\frac{7\sqrt{15}}{15}$ м^2, центр вне треугольника; либо $S=\sqrt{15}$ м^2, центр внутри треугольника. 33. 12. 34. $\frac{\sqrt{S}-\sqrt{Q}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$. 35. 15. 36. 60 или $\frac{1500}{49}$. 37. $6\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$. 38. $\frac{11}{12}$. 39. (2). 40. 3. 41. (3). 42. (2). 43. 14. 44. 6. 45. 120^0. 46. $\frac{\sqrt{106}}{2}$. 47. 6. 48. $\frac{6\sqrt{3}}{7+\sqrt{13}}$. 49. 102%. 50. $\frac{2}{3}$. 51. $\frac{b^2-a^2}{b}$. 52. $\frac{7\sqrt{13}}{10}$. 53. $\frac{45}{4}$; 12; 20; 28. 54. 4; 5; 6 или 3; 5; 7. 55. При равенстве всех сторон. 56. 10 см. 57. (2). 58. 28 см. 59. Уменьшится на 9%. 60. 3 см; 4 см. 61. (4). 62. $\frac{19}{21}$. 63. $\frac{13}{2}$. 64. (1). 65. (5). 66. 5. 67. $\sqrt{15}$. 68. $18\sqrt{3}$. 69. (5). 70. $2\sqrt{3}$. 71. 0,8 м; 0,6 м. 72. $200\sqrt{2}$. 73. 2. 74. (г). 75. 52 см^2. 76. 3. 77. $\frac{24\sqrt{22}}{11}$. 78. 62. 79. 105^0. 80. 90^0. 81. 120 см^2. 82. 16. 83. (1). 84. Основания: 15 см и 25 см; боковая сторона: 15 см. 85. 100. 86. $\frac{14}{3}$. 87. 200. 88. 80. 89. 80. 90. 4. 91. $\frac{3}{10}$. 92. $\frac{50}{7}$. 93. $\frac{19}{44}$. 94. 18. 95. (3). 96. 7/4 и 49/4. 97. $\pi-\arcsin\frac{2}{3}$; $3\sqrt{\frac{41}{20}}$. 98. 2; 3. 99. $2\sqrt{15}$. 100. (4). 101. Отрезок должен проходить через середины AB и BC до пересечения с внешними границами полей. 102. 19%. 103. 1. 104. $\frac{qs-t^2}{t}$.

105. $\sqrt{m^2+n^2}$. 106. (2). 107. 8. 108. 90π или 10π. 109. 13. 110. 3. 111. 10. 112. 3. 113. $4\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$ (одна хорда); $2\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ (две хорды). 114. $\frac{100}{7}$, $\frac{25}{4}$. 115. $\frac{7}{2}$ см. 116. 3 см. 117. 1. 118. 16 см^2.

119. $\sqrt{20}-2$. 120. 12π. 121. $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$. 122. $\frac{9\sqrt{2}}{19}$.

123. 5. 124. $2\sqrt{3}r^2$. 125. 10 см; 10 см; 12 см. 126. $\angle AOB=105^\circ$.

127. 42. 128. 3; 4; 5. 129. 2. 130. $\frac{15\sqrt{15}}{32}$. 131. $90\sqrt{3}$. 132. 11.

133. $\frac{1}{2}$. 134. $1+\sqrt{3}$. 135. а) $\frac{180}{13}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{3\sqrt{65}}{2}$. 136. $3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

137. а) $\arcsin\frac{7}{8}$; б) $\frac{784\sqrt{15}}{495}$. 138. 3. 139. $2\sqrt{3}+2$. 140. 10; 10; $2\sqrt{10}$.

141. 8. 142. $\frac{\pi}{3}$. 143. arctg2. 144. 28. 145. arctg4; 17.

146. $\frac{3}{2\sin\frac{3\pi}{10}}$. 147. 8; $\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$. 148. 10. 149. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)$.

150. (3). 151. 80. 152. (2). 153. $\frac{15\sqrt{2}}{2}$. 154. $4\sqrt{3}$. 155. 12.

156. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$. 157. 8. 158. $\frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$. 159. 5. 160. $\frac{9p^2}{200}$. 161. 2.

162. 32. 163. $y=-\frac{7}{3}x-\frac{13}{3}$; $\sqrt{58}$. 164. (6). 165. 1 : 3. 166. (0; 0).

167. 33. 168. 25. 169. (1). 170. $\arccos\left(-\frac{49}{50}\right)$.

Содержание

ЗЕЛЕНСКИЙ Александр Степанович
ПАНФИЛОВ Игорь Иванович

Геометрия в задачах

Серия *«Математика: перезагрузка»*

Редактирование, корректура:
А. С. Зеленский, И. И. Панфилов, Д. И. Панфилов
Компьютерная верстка: *С. Л. Герасимов*
Обложка: *С. А. Зеленская*
Ответственный за выпуск: *А. И. Шурша*

Научно-технический центр «Университетский».
УНИВЕР-ПРЕСС.
107140, Москва, Красносельский туп., 5.
Тел./факс: (495) 626-22-77 (многоканальный), 230-60-18.
E-mail: edunews@edunews.ru. Интернет-сайт: www.edunews.ru

Формат 60x90/16. Печ. л. 17.
Тираж 2 000 экз. Заказ № 3811.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в
в ОАО "Чеховский полиграфический комбинат".
142300, г. Чехов Московской обл. Тел. (499) 270-73-59.

Зеленский
Александр Степанович

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, профессор Российской академии естествознания. Автор более 100 научных, учебных и научно-популярных публикаций, среди которых несколько книг по математике для школьников. Главный редактор журналов «АБИТУРИЕНТ» и «Математика & Развитие Интеллекта: MATEMAT.RU».

Более 20 лет преподаёт математику в лицейских классах при механико-математическом факультете МГУ (школа № 25), является учителем высшей категории, Соросовским учителем. Регулярно участвует в проведении вступительных экзаменов в МГУ им. М. В. Ломоносова и различных олимпиад.

E-mail: asz@edunews.ru

Панфилов
Игорь Иванович

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Государственного университета — Высшая школа экономики, преподаватель подготовительных курсов географического и социологического факультетов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Автор более 40 научных и научно-педагогических работ, ряда учебных пособий по элементарной математике.

В течение почти 20 лет преподаёт математику в лицейских классах (математический и экономико-математический профили) при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова в ГОУ СОШ № 25 г. Москвы, является методистом журнала для старшеклассников и поступающих в вузы «АБИТУРИЕНТ».

E-mail: panfilovi@list.ru

ISBN 978-5-7953-0160-0